Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Maria Gabriella Graziano

Uniformità di Fréchet-Nikodym su spazi di Vitali

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.1S, p. 93–96.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_1S_93_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. III-A, Supplemento ad Aprile 2000, 93-96

Uniformità di Fréchet-Nikodym su spazi di Vitali.

MARIA GABRIELLA GRAZIANO

Il *Teorema di decomposizione di Lebesgue* stabilisce la possibilità di rappresentare (in maniera univoca) ogni misura finitamente additiva (f.a.) limitata μ definita su un'algebra Booleana come somma di due misure f.a. limitate λ e ν, la prima essendo continua rispetto ad una misura f.a. η fissata (ovvero λ è nulla dove η è nulla) la seconda essendo singolare con η (i valori non nulli di ν sono assunti su un insieme sul quale η è zero). Inoltre λ e ν sono continue rispetto a μ.

Il *Teorema di decomposizione di Hewitt-Yosida* permette invece di scrivere una misura f.a. limitata μ in modo unico come somma di due tali, λ e ν, la prima numerabilmente additiva, la seconda puramente finitamente additiva («disgiunta» cioè da ogni misura numerabilmente additiva). Ancora λ e ν sono μ-continue.

Dalle decomposizioni di misure seguono, in alcune situazioni, quelle di funzionali ed operatori. La decomposizione alla Hewitt-Yosida comporta, ad esempio, la possibilità di decomporre ogni funzionale lineare continuo T sullo spazio di Banach L_∞ come somma di un funzionale integrale generato da una funzione L_1 e di un funzionale che è «disgiunto», in senso opportuno, da ogni altro funzionale integrale. L'intima connessione tra decomposizione di misure e di operatori emerge, poi, chiaramente quando si consideri per ogni misura f.a. μ da una σ-algebra $\mathcal{F}$ ad uno spazio di Banach Y, l'operatore T_μ ad essa associato che agisce sullo spazio $S(\mathcal{F})$ delle funzioni semplici come indicato dalla formula

$$(\star) \qquad T_\mu\Big(\sum_i \alpha_i \chi_{A_i}\Big) = \sum_i \alpha_i \mu(A_i)\,.$$

Tramite la $(\star)$ è possibile, infatti, costruire una corrispondenza lineare biettiva tra lo spazio $B(L_\infty(\mathcal{F}), Y)$ degli operatori lineari limitati da $L_\infty(\mathcal{F})$ in Y e lo spazio delle misure limitate da $\mathcal{F}$ in Y. È facile allora immaginare come le decomposizioni di T_μ e quelle di μ possano essere messe in corrispondenza.

I teoremi classici di decomposizione di Lebesgue e di Hewitt-Yosida per misure f.a. a valori reali sono stati generalizzati al caso di misure a valori in spazi di Banach, gruppi topologici, semigruppi uniformi. La decomposizione classica per funzionali e operatori è stata estesa al caso di funzionali e operatori definiti su spazi di Riesz (più generali degli usuali spazi di funzioni).

In particolare, il problema di estendere i teoremi di decomposizione al caso di funzioni f.a. non necessariamente numeriche e quello di ottenere gli stessi come corollari di un teorema di decomposizione più generale sono stati affrontati, tra gli altri, da L. Drewnowski, T. Traynor e H. Weber.

A partire dai lavori di Drewnowski, nei primi anni settanta, appare chiaro che l'ambito più naturale per lo studio delle misure f.a. a valori in spazi astratti è quello delle topologie di Fréchet-Nikodym (FN) su anelli Booleani. Le proprietà delle misure diventano proprietà di opportune topologie e come tali vengono investigate. Se $\mu : R \to \mathcal{G}$ è una misura sull'anello Booleano R a valori nel gruppo topologico $\mathcal{G}$, lo studio dell'anello topologico (R, τ_μ) (dove τ_μ è la topologia di FN associata a μ) porta a risultati di grande generalità applicabili a μ.

In particolare, rispondendo ad un problema posto da Drewnowski, Traynor ottiene in [3] un teorema di decomposizione molto generale in termini di topologie da cui i teoremi di Lebesgue e di Hewitt-Yosida seguono come corollari. La decomposizione avviene rispetto ad una arbitraria topologia di FN: se $\mu : R \to \mathcal{G}$ è una misura f.a. esaustiva da R anello Booleano in $\mathcal{G}$ gruppo topologico commutativo e di Hausdorff, τ è una FN topologia su R, esistono e sono univocamente determinate le misure f.a. esaustive λ e ν tali che $\mu = \lambda + \nu$ con

1) λ τ-continua (ovvero $\tau_\lambda \subseteq \tau$)
2) ν τ-singolare (ovvero $\tau_\nu \wedge \tau = 0$)

λ e ν continue rispetto a μ (ovvero $\tau_\lambda, \tau_\nu \subseteq \tau_\mu$).

La proprietà di esaustività, che verrà meglio precisata in seguito, è equivalente nel caso di misure reali alla usuale limitatezza. Il teorema di Lebesgue si riottiene per $\tau = \tau_\eta$, quello di Hewitt-Yosida quando la topologia τ è l'estremo superiore delle topologie di FN continue rispetto all'ordine definite su $\mathcal{R}$.

Nei lavori di Weber le decomposizioni classiche ed il risultato di Traynor sono conseguenza di una approfondita indagine sulla struttura del reticolo delle topologie di Fréchet-Nikodym. In particolare, si prova che le topologie di FN esaustive su un anello booleano R formano un'algebra di Boole, risultato fondamentale che consente di ottenere le decomposizioni di una misura μ esaustiva su R a partire da quelle della sua estensione uniformemente continua $\tilde{\mu}$ sul completamento di R rispetto alla più fine topologia di FN esaustiva.

Questa idea si è rivelata successivamente feconda anche nel caso, affrontato in [1], della decomposizione di operatori definiti su spazi di Riesz (e più in generale su l-gruppi). Nel caso di uno spazio di Riesz L il ruolo delle topologie di FN esaustive è giocato dalle topologie localmente solide e localmente esaustive(o pre-Lebesgue). Passando al completamento di L rispetto alla più fine topologia pre-Lebesgue, si ottengono le decomposizioni per un omomorfismo $T : L \to \mathcal{G}$. Nel caso della decomposizione alla Hewitt-Yosida, spezzando T in una parte che è «σ-smooth» ed una ad essa complementare, il «più grande» integrale di Daniell viene, per così dire, estratto da T.

Le analogie presenti tra la teoria degli anelli Booleani con una topologia di FN e quella degli l-gruppi topologici localmente solidi costituiscono il punto di partenza di questo lavoro. Chiaramente è desiderabile unificare le due teorie e trattarle in un contesto più generale. Come questo sia possibile emerge ricordando, anche solo sommariamente, le definizioni.

Un *anello Booleano topologico* (o con una topologia di topologia di Fréchet-Nikodym) è un anello Booleano R munito di una topologia τ di gruppo su $(R, \triangle)$ ($\triangle$ è l'usuale differenza simmetrica) in cui lo zero ha una speciale base di intorni.

La proprietà richiesta a tali intorni garantisce che le operazioni $\vee$ e $\wedge$ siano uniformemente continue.

Un *l-gruppo topologico localmente solido* è un l-gruppo L con una topologia τ di gruppo su $(G, +)$ tale che lo zero abbia una base di intorni solidi. Anche una topologia siffatta rende le operazioni del reticolo uniformemente continue.

Guardando alla struttura di reticolo che accomuna gli anelli e gli l-gruppi, in [4] i *reticoli uniformi* vengono introdotti quale struttura più naturale per trattare in maniera unificata le due teorie. Un reticolo uniforme $(E, \mathcal{U})$ è infatti un reticolo E con una struttura uniforme $\mathcal{U}$ tale da rendere le operazioni $\vee$ e $\wedge$ uniformemente continue. I reticoli uniformi generalizzano gli anelli topologici e gli l-gruppi localmente solidi e sono adatti per trattare molti risultati comuni. La struttura di reticolo è tuttavia insufficiente a garantire che le uniformità esaustive formino un'algebra di Boole, risultato che, abbiamo detto, comporta la decomposizione di misure ed operatori. Da qui l'esigenza di ricorrere ad una struttura algebrica più ricca dei reticoli, che contenga sia gli anelli Booleani che gli l-gruppi e che possegga quanto più è possibile delle proprietà comuni ad entrambi. Essa dovrà essere, come è ovvio, un reticolo distributivo ma dovrà possedere anche una struttura additiva. In un anello Booleano, infatti, l'unione di elementi disgiunti è una operazione, naturalmente solo parzialmente definita, che possiede proprietà di cancellazione e compatibilità con l'ordine analoghe a quelle della somma in un l-gruppo. Gli spazi di Vitali (o clan minimali commutativi) introdotti in [2], sembrano essere la risposta più naturale al problema. Uno spazio di Vitali E è, infatti, un reticolo distributivo dotato di una operazione parziale di somma ($\oplus$) associativa, commutativa, compatibile con l'ordine, cancellativa e con una speciale proprietà detta di differenza. Questi semigruppi parzialmente ordinati, oltre a rappresentare, come si mostra nel lavoro, l'ambito più naturale per trattare misure e operatori con metodi topologici, sono abbastanza generali da includere altre strutture algebriche di interesse quali MV-algebre, clan di insiemi fuzzy (T_∞-tribes), BCK-algebre. Lo studio delle misure su spazi di Vitali con metodi di tipo topologico, che risponde ad un problema aperto posto da K.D. Schmidt, comporta allora risultati per misure definite su ciascuna delle strutture precedenti.

Le idee principali possono riassumersi come segue. Una misura μ dallo spazio di Vitali E in un gruppo topologico $\mathcal{G}$ naturalmente è definita richiedendo che $\mu(x \oplus y) = \mu(x) + \mu(y)$ quando $x \oplus y$ è definito. Uno *spazio di Vitali uniforme* (o con una uniformità alla FN) è definito associando ad E una struttura uniforme $\mathcal{U}$ tale che le operazioni del reticolo, l'operazione parziale di somma e quella di differenza definita a partire da $\oplus$ siano uniformemente continue.

Denotato con $\mathcal{L}\mathcal{V}(E)$ l'insieme di tutte le uniformità di Fréchet-Nikodym su E, il primo passo consiste nello studio di tale insieme ordinato con la relazione di inclusione. La dimostrazione dei teoremi che sono alla base della teoria non è agevole per il fatto che le operazioni con cui si lavora sono solo parzialmente definite. Di fondamentale importanza è stabilire che il reticolo completo $\mathcal{L}\mathcal{V}(E)$ è generato da filtri. Se ne può dedurre infatti che il filtro degli intorni dello zero determina univocamente una uniformità $\mathcal{U}$ di $\mathcal{L}\mathcal{V}(E)$: questo risultato, a prima vista molto prevedibile, non è immediato nelle strutture più povere di anelli ed l-gruppi e non vale, in generale, per i reticoli uniformi.

Una volta studiate le proprietà delle uniformità di FN sullo spazio di Vitali, si associa ad ogni misura μ una uniformità: essa è definita come la meno fine tra quelle di $\mathcal{L}\mathcal{V}(E)$ che rendono μ uniformemente continua.

Le decomposizioni sono ottenute, come nel teorema di Traynor, per le misure esaustive. Una misura μ è detta esaustiva se l'uniformità ad essa associata è tale che le successioni monotone siano di Cauchy. La proprietà di esaustività è quella che consente di decomporre una misura passando al completamento.

Detto $\mathcal{W}_s$ il superiore delle uniformità esaustive di $\mathcal{L}\mathcal{V}(E)$, si considera il completamento topologico di E rispetto a $\mathcal{W}_s$. Se $(\widetilde{E}, \widetilde{\mathcal{W}_s})$ è lo spazio completo associato, $\widetilde{E}$ è un reticolo limitato il cui centro (definito come per le algebre di Boole) è un'algebra Booleana isomorfa al reticolo di tutte le uniformità esaustive.

L'uniformità $\mathcal{U}$ rispetto alla quale avviene la decomposizione è arbitraria ma può supporsi all'inizio, senza per questo ledere la generalità, esaustiva. Ad essa corrisponde allora un elemento c del centro di $\widetilde{E}$. Poiché la misura μ da decomporre è continua rispetto a $\mathcal{W}_s$ (perché esaustiva), se ne può considerare l'estensione uniformemente continua su $\widetilde{E}$, $\tilde{\mu}$, che risulta completamente additiva. Il passaggio al completamento consente, allora, di lavorare con uno spazio più ricco e con una misura che ha maggiori proprietà di quella iniziale. Spezzando $\tilde{\mu}$ su c e sul suo complemento c' come nei teoremi tradizionali, si ottiene la decomposizione di $\tilde{\mu}$ da cui si ricava quella di μ.

È chiaro poi come dalla decomposizione generale si riottengano, per opportune scelte dell'uniformità $\mathcal{U}$, quelle classiche.

Per gli l-gruppi risultati significativi che abbraccino quelli presenti in [1] seguono dall'analisi del caso localmente esaustivo.

BIBLIOGRAFIA

[1] BASILE A., TRAYNOR T., *Monotonely Cauchy locally solid topologies*, Order, **7** (1991), 407-416.

[2] SCHMIDT K. D., *Jordan decomposition of generalized vector measures*, Pitman Research Notes in Mathematics Series, Longman Scientific and Technical, 1989, **214** (1989).

[3] TRAYNOR T., *The Lebesgue decomposition for group valued set-functions*, Trans. Amer. Math. Soc., **220** (1976), 307-319.

[4] WEBER H., *Uniform Lattice I: A generalization of topological Riesz spaces and topological Boolean rings; Uniform Lattice II: Order continuity and exhaustivity*, Ann. Mat. Pura Appl., **160, 165** (1991, 1993), 347-370, 133-158.

Dipartimento di matematica «R. Caccioppoli», Università di Napoli Federico II
e-mail: grazian@matna3.dma.unina.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Napoli) - Ciclo X
Direttore di ricerca: Prof. Paolo de Lucia, Università di Napoli «Federico II»