Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Michele Artigue

L'insegnamento e l'apprendimento della Matematica a livello universitario

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.1, p. 81–103.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_1_81_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol III-A, Aprile 2000, 81-103

L'insegnamento e l'apprendimento della Matematica a livello universitario.

Questioni cruciali per la ricerca contemporanea in didattica

MICHELE ARTIGUE

Per più di trent'anni, la ricerca in didattica della matematica ha cercato di chiarire, mediante il lavoro sia teorico sia sperimentale, i processi d'apprendimento in matematica. Ha anche cercato di sviluppare strategie per l'insegnamento che prendono in considerazione la conoscenza che esso ha progressivamente costruito, e ha successivamente tentato di testarlo. In un primo momento, tale ricerca si è concentrata sui primi stadi dell'apprendimento, che riguardano la scuola di base obbligatoria, mentre i lavori a livello di scuola secondaria e di università, cioè quelli che riguardano i livelli scolastici non obbligatori, erano abbastanza marginali. Ma il crescente numero di studenti che scelgono matematica a questi livelli più avanzati oggi pone problemi educativi che ancora costituiscono nuove sfide per la ricerca. In questo articolo, ci interesseremo a questi problemi e cercheremo di delineare più precisamente le potenzialità così come i limiti del lavoro condotto sinora.

La discussione è affrontata da un punto di vista personale, segnato dalla mia cultura europea e francese; altri ricercatori avrebbero senza dubbio una visione diversa. In effetti, non è facile in didattica, come in matematica, fornire un quadro globale dello stato di sviluppo della ricerca in una data area e identificare chiaramente i risulta-

Traduzione, rivista dall'Autore, dell'articolo, the Teaching and Learning of Mathematics at the University Level: Crucial Questions for Contemporary Research in Education, pubblicato sulle Notices of the American Mathematical Society, Volume 46 (1999), Number 11, 1377-1385. Ringraziamo l'American Mathematical Society di averci permesso traduzione e pubblicazione di questo articolo. La traduzione è dovuta a Michela Maschietto.

ti che sono stati là ottenuti. Questo risulta inizialmente dal fatto che questo campo di ricerca non è affatto unificato. Diversi approcci coesistono, rendendo difficili le generalizzazioni, come testimonia il recente studio ICMI edito da A. Sierpinska e J. Kilpatrick [1] e dedicato alla didattica della matematica come campo di ricerca. Questa diversità è indubbiamente legata alla relativa giovane età del campo, ma deriva anche dalla complessità dei fenomeni studiati; un singolo punto di vista sembra insufficiente per racchiudere questa complessità. La diversità deriva inoltre dal fatto che i processi di insegnamento e d'apprendimento dipendono in parte dal contesto sociale e culturale in cui si sviluppano; i risultati della ricerca dipendono allora anche dagli ambienti sociali e culturali, e non è sempre facile precisare il loro dominio di validità.

D'altra parte, benché i capisaldi acquisiti dalla ricerca permettano di comprendere meglio le difficoltà che gli studenti incontrano, come pure le disfunzioni del nostro insegnamento, essi più raramente ci forniscono mezzi di azione poco costosi per rendere l'insegnamento migliore in modo immediato e sensibile.

Nonostante tutte queste difficoltà, è innegabile che la ricerca avanza, producendo allo stesso tempo quadri teorici per i problemi d'insegnamento e d'apprendimento, metodologie per il loro studio e risultati che riguardano l'apprendimento in ogni dominio considerato. In ciò che segue, dopo aver affrontato la questione dei fondamenti della ricerca, mi concentrerò su due tipi di risultati che mi sembrano trasversali alla gamma di approcci: il primo riguarda le discontinuità e le rotture nell'apprendimento, il secondo riguarda questioni di flessibilità cognitiva. Li illustrerò con esempi precisi, presi da due aree della matematica che sono state finora predilette dalla ricerca a livello universitario — analisi e algebra lineare. Nell'ultima parte, evidenzierò alcune questioni che mi colpiscono, per quanto insufficientemente investigate nella ricerca.

Un'ampia versione del presente articolo, con maggiori riferimenti, appare con il titolo «What can we learn from educational research carried out at university level» in uno studio ICMI, in corso di stampa presso Kluwer. Per ulteriori letture sui livelli d'insegnamento che c'interessano qui, il lettore può consultare [2, 3, 4, 5].

I fondamenti della ricerca in Didattica.

Nei vent'anni passati, la ricerca in didattica è stata segnata dalla predominanza di approcci costruttivisti basati sul lavoro di Piaget. In questi approcci, l'apprendimento è considerato come un processo d'adattamento nel senso biologico del termine, basato sui processi di assimilazione e di accomodamento: assimilazione quando le situazioni appena incontrate possono essere gestite con un semplice adattamento di schemi cognitivi già costruiti; accomodamento quando si verifica un importante squilibrio, che necessita di una riorganizzazione della conoscenza precedente. Questi approcci costruttivisti hanno permesso alle persone di avere uno sguardo nuovo sull'apprendimento, mostrando che esso non può essere ridotto al semplice processo di trasmissione di fatti. Ciò che può essere appreso è fortemente vincolato dalle concezioni iniziali dei soggetti — dalle situazioni che sono loro proposte e dai mezzi d'azione, che sono forniti per queste situazioni. Queste cose hanno allora contribuito a spiegare i limiti indicati delle strategie d'insegnamento che attribuiscono un ruolo predominante a ciò che dice l'insegnante.

Nonostante questi contributi, gli approcci costruttivisti sono ritenuti sempre più insufficienti per modellizzare in modo soddisfacente i processi d'apprendimento in matematica, perché la dimensione sociale e culturale di questo apprendimento non è sufficientemente presa in considerazione. Come A. Sierpinska e S. Lerman hanno evidenziato in un articolo del 1996 a proposito di queste questioni, la consapevolezza di questi limiti porta a varie costruzioni che sono fortemente differenziate dal modo in cui le relazioni tra la sfera individuale, quella sociale e quella culturale sono concepite. Non vado a rivedere l'analisi di questa diversità, ma vorrei illustrare con due esempi come questo intervento della sfera sociale e di quella culturale porta a relativizzare le analisi cognitive classiche. Lo farò riferendomi a due quadri teorici che mi sono particolarmente familiari: la teoria delle situazioni didattiche [6], il cui padre è G. Brousseau, e la teoria antropologica relativa al sistema didattico, sviluppata più recentemente da Y. Chevallard [7].

Nella teoria delle situazioni didattiche, l'apprendimento è infatti visto come un processo di adattamento, ma si ammette che i processi d'adattamento usati dall'allievo in una data situazione d'insegnamento non sono tutti di natura matematica. L'allievo si adatta ricorrendo alla conoscenza matematica, ma si adatta anche ricorrendo alla conoscenza del sistema d'insegnamento, delle sue regole e delle sue abitudini, e cercando d'indovinare le aspettative dell'insegnante — ciò che G. Brousseau ha isolato e definito come il «contratto didattico». Un buon numero di studenti scolasticamente bene adattati ha successo, anche all'università, imparando a decodificare i termini del contratto didattico e conformandosi ad esso più che imparando realmente la matematica. A causa dei forti effetti del contratto didattico, non è facile costruire situazioni d'apprendimento in cui possiamo affermare con sicurezza che il successo degli studenti implichi un reale impegno matematico. Come mostrano diversi lavori, la valutazione in queste circostanze è persino più difficile. La teoria delle situazioni didattiche ha sviluppato un insieme di strumenti concettuali e di tecniche per analizzare le situazioni d'insegnamento da questo punto di vista e per guidare la costruzione di quelle che ottimizzano le relazioni tra l'attività matematica dell'insegnante e le attività che possono essere sotto la responsabilità degli studenti. Un poco più avanti, fornirò un esempio legato all'integrazione in analisi.

La teoria antropologica si distingue abbastanza dal costruttivismo dominante. L'accento è posto sulla dimensione istituzionale dell'apprendimento; le nostre relazioni con gli oggetti matematici emergono, secondo essa, dall'intreccio delle relazioni istituzionali in gioco dove noi ci troviamo, riferendoci qui al termine «istituzione» in un senso molto ampio. Come mostrano i diversi lavori, queste relazioni per un oggetto non sono assolute, ma variano considerevolmente da un'istituzione ad un'altra.

Queste differenze sono particolarmente importanti per chiarire il contesto quando si studiano i problemi della transizione tra istituzioni: per esempio, il problema della transizione tra scuola secondaria e università, che c'interessa qui. Una parte della difficoltà di questa transizione può essere meglio compresa se si considera che, oltre al vocabolario comune e all'apparente somiglianza di compiti e tecniche, la scuola secondaria e l'università sviluppano relazioni profondamente diverse rispetto ad oggetti matematici comuni, per esempio a quelli dell'analisi - limiti, derivate e così via. Per questa ragione, i docenti universitari incontrano serie difficoltà nel far emergere la conoscenza degli studenti e sono portati ad avere l'impressione che gli studenti non sappiano nulla. In aggiunta, le difficoltà, unite al salto culturale, sono rafforzate da un altro tipo di fenomeno evidenziato dalla ricerca didattica: il fatto che molta parte della nostra conoscenza rimane fortemente contestualizzata, cioè dipendente dalle situazioni da cui deriva. Qualche insegnante conosce bene questo fenomeno e con una parola è in grado di evocare una situazione, un momento della sua storia comune con gli studenti, per evocare questo tipo di conoscenza in un nuovo contesto. Ma cambiamenti di classe e *a fortiori* d'istituzione tagliano i legami di questa memoria comune, limitando così il dominio di conoscenza utilizzabile a quelli che sono già indipendenti dal contesto. La ricerca recente, come nella tesi di F. Praslon [8] riguardante la nozione di derivata, è dedicata alla comprensione di tutti questi fenomeni. Analizzando in modo preciso la cultura della scuola secondaria e quella dell'università rispetto alla nozione di derivata e al suo ambiente, F. Praslon evidenzia l'esistenza di una molteplicità di micro-rotture tra queste due culture. Egli mostra anche che esiste un insieme di competenze che sono trattate in modo marginale al liceo, ma che si suppongono tuttavia acquisite all'inizio dell'università. Solo una minoranza di studenti è in grado d'affrontare in modo autonomo questo «vuoto didattico». F. Praslon elabora e sperimenta un dispositivo per l'insegnamento universitario che permette ai docenti di lavorare con gli studenti del primo anno su queste competenze.

In questa parte, ho discusso la varietà di approcci in didattica della matematica, alla luce di un crescente riconoscimento della dimensione culturale e sociale del processo d'apprendimento. Anche altre evoluzioni hanno un ruolo, qualcuna sovrapponendosi con quanto sopra esposto. Per esempio, per più di vent'anni, la ricerca ha messo in evidenza il fatto che l'apprendimento della matematica non è un processo continuo, che esso necessita di ricostruzioni, di riorganizzazioni, talvolta addirittura di vere rotture con la conoscenza e i modi di pensare precedenti. Questo fatto ha spesso alimentato una visione gerarchica dell'apprendimento, concepito come la progressione attraverso una successione di stadi, come una progressione verso livelli crescenti d'astrazione. Sempre più, la ricerca mostra che l'apprendimento si basa, in modo piuttosto forte, sulla flessibilità del funzionamento matematico mediante *articulation* ([1]) di punti di vista, «registri di rappresentazione», e «ambienti di funzionamento matematico». Anche la concettualizzazione appare sempre più dipendente dagli strumenti concreti e simbolici del lavoro matematico. A causa della rapida evoluzione degli strumenti che risulta dai progressi tecnologici, è particolarmente importante oggi prendere in considerazione questa dipendenza, che riguarda allo stesso tempo ciò che è appreso e i metodi d'apprendimento.

Anche se alcuni ricercatori sono stati portati a sviluppare approcci specifici, come la teoria APOS concepita da E. Dubinsky, la ricerca riguardante l'insegnamento a livello universitario si situa in questa prospettiva generale. In effetti, anche se il pubblico di studenti, a cui ci si riferisce, è cognitivamente e emotivamente più maturo, con relazioni con la matematica già basate su una lunga storia, e se la conoscenza ambita è più complessa e più formalizzata, nulla oggi dice che esistano realmente processi specifici d'apprendimento per questo livello d'insegnamento o che i modelli costruiti siano inadatti ad esso. Per questo, abbiamo scelto in ciò che segue di organizzare la presentazione di qualche risultato riguardo a due questioni che simultaneamente trascendono, mi sembra, le variazioni di approcci e i livelli d'insegnamento: la questione delle ricostruzioni e delle rotture da una parte, quella della flessibilità dall'altra.

Ricostruzioni e rotture nell'apprendimento della matematica.

La necessità di ricostruzioni e rotture nell'apprendimento della matematica potrebbe sembrare banale. Tuttavia, l'insegnamento

([1]) «Articulation» si riferisce alle relazioni tra una parte e il tutto, o tra una parte ed un'altra. Allo stesso tempo, si richiama alla mente sia lo scambio da una parte all'altra sia i mezzi tecnici per costruire queste relazioni.

tende a vivere nella finzione che i processi d'apprendimento siano continui. Senza dubbio, è una finzione conveniente per separare le responsabilità rispettive degli studenti da quelle degli insegnanti. Ma è una finzione che genera difficoltà reali.

L'esempio dell'analisi illustra bene la varietà di discontinuità da prendere in considerazione. Per presentare questa varietà, distingueremo tre principali tipi di ricostruzioni.

La ricostruzione di relazioni con oggetti familiari

L'apprendimento dell'analisi presuppone come prima cosa la ricostruzione di relazioni con oggetti matematici, che esistevano per i nostri studenti già prima che l'insegnamento dell'analisi iniziasse. Per esempio, prendiamo un oggetto come la tangente. In questo caso, la ricerca mostra le difficoltà generate dalle usuali strategie d'insegnamento nella scuola secondaria, che non gestisce questa ricostruzione, ma anche il costo assai moderato e l'efficacia di assumersene la responsabilità a questo livello [9]. I numeri reali forniscono un altro esempio, in cui le ricostruzioni necessarie risultano essere molto meno facili. I numeri reali sono presenti presto nel curriculum della scuola secondaria come oggetti algebrici, con un ordine denso e una rappresentazione geometrica come retta reale, e con approssimazioni decimali che possono essere facilmente ottenute con calcolatrici tascabili. Tuttavia, parecchie ricerche mostrano che persino all'entrata all'università, gli studenti mantengono concezioni confuse che sono appena coerenti e scarsamente adatte alle necessità del mondo dell'analisi [10]. Per esempio, i numeri reali sono riconosciuti privi di lacune nel loro ordinamento, ma, a seconda del contesto, gli studenti fanno in modo di conciliare questa proprietà con l'esistenza dei numeri appena prima o dopo un numero dato (0,999... è allora spesso visto come il predecessore di 1,000...). Più del 40% degli studenti che entrano nelle università francesi, considera che se due numeri A e B sono più vicini di $1/N$ per ogni numero positivo N, essi non sono necessariamente uguali, solo infinitamente vicini. Le relazioni tra i numeri irrazionali e le loro approssimazioni decimali restano confuse. Senza dubbio, le ricostruzioni sono necessarie per comprendere i «modi di pensare dell'analisi». La ricerca mostra che queste non sono facilmente indotte dal tipo di analisi intuitiva e algebrica, che è soprattutto in gioco a livello di scuola secondaria; evidenzia anche che le costruzioni del campo dei numeri reali introdotte a livello universitario restano in gran parte non efficaci, se gli studenti non sono indotti a confrontarsi con le incoerenze delle loro concezioni e con i conflitti cognitivi che ne derivano.

Integrare nuove sfaccettature di un concetto

Le ricostruzioni necessarie non sono limitate a quelle degli oggetti familiari, preesistenti all'entrata in questa area della matematica. Altre ricostruzioni si stanno rivelando necessarie, perché solo certe sfaccettature di un concetto possono essere presentate in una prima esposizione. Il caso dell'integrale sembra illustrare bene questa situazione. In Francia, come in numerosi altri paesi, l'integrale è introdotto al termine della scuola secondaria mediante la nozione di integrale indefinito, perciò come processo inverso della differenziazione. È immediatamente utilizzato in semplici calcoli di aree e volumi, che sono basati su un approccio intuitivo a queste nozioni e su una presentazione pragmatica del Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale. È a livello universitario che una teoria dell'integrazione è introdotta, con l'integrale di Riemann e poi, a livelli più avanzati, con l'integrale di Lebesgue. Sono necessariamente in gioco successive ricostruzioni delle relazioni con la nozione di integrale. Nei vent'anni passati, numerose ricerche in didattica sono state dedicate ai concetti di derivata e d'integrale, con una grande convergenza dei risultati ottenuti, indipendentemente dal paese coinvolto. Questa ricerca mostra che gli studenti raggiungono un ragionevole livello di esecuzione quando trattano compiti standard, in particolare di natura computazionale, ma nulla di più. Come appare chiaramente in [11], per esempio, se si chiede agli studenti di decidere da soli se determinate situazioni in problemi di modellizzazione richiedono l'uso di una procedura di integrazione, essi si trovano completamente in imbarazzo. Devono la loro salvezza solo agli indizi linguistici presenti in generale nella formulazione di questo tipo di problemi, e che gli studenti hanno imparato a riconoscere (porzioni, elementi di area o lavoro o forza, decomposizione infinitesimale, e così via). Peggio, un certo numero di studenti intervistati direttamente, includendo tra questi i migliori, non esita a dichiarare che in questa area la cosa più sicura non è cercare di capire ma operare meccanicamente. Non è necessario interpretare questo fatto come una sorta di fatalità cognitiva. Stiamo osservando i modi economici di adattamento che i nostri studenti sviluppano quando esposti a pratiche didattiche inadeguate.

Fortunatamente, la ricerca non si è limitata a tali resoconti negativi. Veniamo ora ad una situazione costruita da M. Legrand [12] per far sì che gli studenti universitari del primo anno comprendano da sé la necessità del concetto d'integrale. La situazione è basata sul seguente, apparentemente semplice, problema: una barra lineare di massa M_1 e un punto di massa M_2 sono disposti come in figura 1, agli studenti si chiede di calcolare l'intensità della forza d'attrazione tra le due masse.

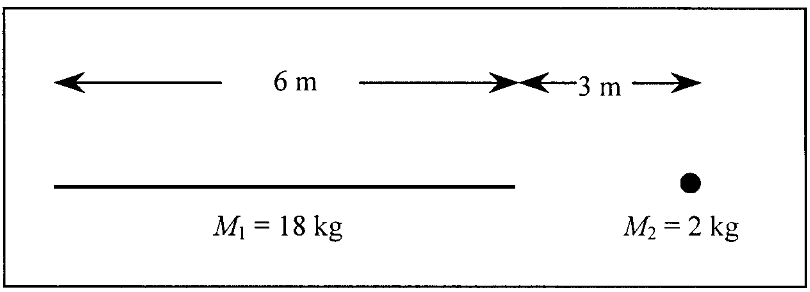

Figura 1

Questa situazione è stata testata essere efficace attraverso varie esperienze in contesti differenti. Che cosa la rende efficace? Per rispondere alla domanda, dobbiamo farne una breve analisi didattica.

Quando formuliamo questa questione senza alcuna allusione linguistica, gli studenti del primo anno non riconoscono un problema d'integrazione. Ma non sono bloccati, poiché possono contare su una strategia spesso usata in fisica: concentrare la massa della barra nel suo centro di gravità e applicare la familiare legge di attrazione tra due masse puntuali. Nelle esperienze, questa strategia era sempre quella predominante. Ma in un gruppo di dimensione ragionevole, come facilmente accade all'università, ci sono sempre studenti che hanno dei dubbi: «il principio di gravitazione universale è valido in questo caso particolare?» Un punto di forza della situazione è che si può testare la validità del principio di gravitazione universale semplicemente applicandolo in un altro modo. Ciò che è generalmente proposto dagli studenti è in effetti quanto segue: tagliare la barra in due metà e applicare il principio di gravitazione universale ad ognuna delle parti. Naturalmente, questo non fornisce lo stesso risultato, e si è dimostrato che il principio di gravitazione universale non è valido in quel caso particolare. Ma la risposta negativa è anche una risposta positiva, dal momento che mette in risalto un fatto essenziale: il contributo di una parte della barra alla forza d'attrazione dipende dalla sua distanza dalla massa puntuale, e questo permette agli studenti di proporre estremi inferiori e superiori per l'intensità richiesta. Inoltre, la tecnica su cui il processo d'invalidazione era basato può essere poi impiegata in un progressivo processo di raffinamento, e questo porta gli studenti alla convinzione che la forza, la cui esistenza è fisicamente attestata, possa essere approssimata accuratamente quanto si vuole. Ciò che sta implicitamente accadendo qui è il processo fondamentale d'integrazione. Naturalmente, nel progetto didattico elaborato da M. Legrand, questo è solo il punto di partenza. Gli studenti devono poi lavorare su situazioni che, in contesti diversi, richiedono lo stesso processo per essere affrontate e risolte. Allora devono cercare e discutere le analogie esistenti tra queste, per fare del processo d'integrazione uno strumento esplicito (in accordo con la distinzione tra la dimensione strumento e quella oggetto dei concetti matematici introdotta da Douady [13]). È solo a questo punto che l'insegnante congiunge questo lavoro matematico con la teoria dell'integrale di Riemann e sviluppa la nozione d'integrazione come un oggetto matematico che sarà poi reinvestito in situazioni più complesse.

Prima di abbandonare questo esempio, lasciatemi sottolineare il seguente punto: l'efficacia qui non è solo legata alle caratteristiche del problema che abbiamo appena descritto; dipende fortemente dal tipo di scenario sviluppato per organizzare l'incontro degli studenti con questa nuova sfaccettatura del concetto d'integrale. Questo scenario dipende in modo cruciale dal carattere sociale dei processi d'apprendimento: è attraverso un gruppo di discussione che si prova che la strategia iniziale è errata; è il gioco collettivo che permette di trovare delle soluzioni in un arco di tempo ragionevole. Lavorare in classe favorisce regolarità nelle dinamiche della situazione che potrebbero non essere presenti se gli studenti fossero di fronte allo stesso problema individualmente o in gruppi molto piccoli. Inoltre, senza dubbio, l'effetto sarebbe differente se l'insegnante stesse semplicemente spiegando questo particolare esempio durante una lezione tradizionale.

Questo esempio potrebbe apparire idilliaco. Sfortunatamente, la ricerca in didattica non ci munisce di mezzi efficaci per trattare tutte le ricostruzioni necessarie così facilmente. Per esempio, le differenze sono evidenti se si considera il concetto di limite, centrale nel campo. Con l'esempio del concetto di limite noi giungiamo alla terza categoria di ricostruzioni, ricostruzioni necessarie perché, come era già riconosciuto da Henry Poincarè [14] all'inizio di questo secolo, i concetti non possono sempre essere insegnati dall'inizio nella loro forma definitiva.

Cambiamenti del livello di concettualizzazione

In molti paesi oggi, a livello di scuola secondaria, si è riconosciuta l'impossibilità di iniziare lo studio dell'analisi con uno sviluppo formale. L'insegnamento poggia sia su una concezione dinamica del limite, basata su esplorazioni grafiche e numeriche, sia su tecniche di natura algebrica. Queste cose permettono agli studenti di risolvere semplici ma interessanti problemi di variazione e di ottimizzazione. La transizione verso approcci più formali, che ha luogo a livello universitario, rappresenta un salto tremendo, sia concettualmente che tecnicamente.

Da un punto di vista concettuale, un elemento cruciale è che la formalizzazione del concetto di limite risponde alle necessità di un lavoro fondazionale, di unificazione e di generalizzazione. Attraverso la formalizzazione, il concetto di limite diventa un «proof-generated concept» nel senso descritto da Lakatos [15]. Non è facile rendere i giovani studenti sensibili a tali interessi, che non fanno realmente parte della loro cultura matematica. E non è facile trovare situazioni analoghe al problema della barra sopra descritto per supportare questi interessi. Per questa ragione, ricercatori come A. Robert (in [4]) suggeriscono per tali ricostruzioni specifici progetti didattici, che permettano di prendere meglio in considerazione la dimensione culturale.

Tuttavia, non si devono sottovalutare le difficoltà tecniche di tale ricostruzione. Da un punto di vista tecnico, un elemento essenziale è il seguente: nella versione algebrica dell'analisi che si incontra in prima presentazione, il lavoro tecnico non costituisce una rottura con il lavoro algebrico ordinario. Non è più così quando si avanza ad aspetti più formalizzati del soggetto. Per esempio, gli studenti devono ricostruire il significato di uguaglianza e comprendere che l'uguaglianza non deriva necessariamente da uguaglianze successive come in algebra, ma può invece derivare dalla ε-prossimità per ogni ε positivo. Abbiamo osservato all'inizio di questa parte le difficoltà che gli studenti presentano nell'apprendere che la ε-prossimità per ogni ε positivo implica uguaglianza.

Un altro punto è che le diseguaglianze diventano predominanti sulle uguaglianze. Questo cambiamento si manifesta in una maggiore complessità tecnica, tanto come i modi associati di ragionamento spesso si basano su condizioni sufficienti che non sono anche necessarie. Questi nuovi modi di ragionamento richiedono una perdita d'informazione, accuratamente controllata, basata su una buona consapevolezza dei rispettivi ordini di grandezza delle diverse parti delle espressioni, che gli studenti devono trattare. In breve, gli studenti devono identificare e imparare a padroneggiare un mondo tecnico completamente nuovo. Lavorare in questo modo non è affatto facile; è necessariamente un processo a lungo termine.

Le necessità matematiche per le ricostruzioni discusse sopra ci aiutano a comprendere, mi sembra, che cosa può separare la capacità di dare un senso intuitivo alla nozione di limite — persino di illustrarla con esempi e controesempi — dalla capacità di manipolare in modo operativo questa nozione con il suo statuto di oggetto costruito, soggetto a dimostrazioni formali. Considerando il numero crescente di studenti nella scuola secondaria a cui si deve insegnare, una tale ricostruzione, senza alcun dubbio, è sotto la responsabilità dell'insegnamento universitario, sino al limite in cui l'università ritiene questa evoluzione come necessaria. Ma la ricostruzione deve essere programmata a lungo termine.

In questa parte, abbiamo chiarito questioni in termini di ricostruzioni di relazioni con gli oggetti matematici, distinguendo tre diversi tipi di ricostruzioni. Ci piacerebbe, tuttavia, chiarire che, anche se i ricercatori riconoscono l'importanza dei cambiamenti qualitativi che abbiamo messo in evidenza sopra, i ricercatori che lavorano al livello universitario non li esprimono per forza in questi termini. Certi ricercatori esprimono più chiaramente le questioni in termini di rotture, riferendosi alla nozione di ostacolo epistemologico derivato dal filosofo G. Bachelard [16]. Questo caso si trova, per esempio, in vari lavori riguardanti la nozione di limite, come quelli citati in un articolo di Cornu [2]. Altri, come E. Dubinsky e A. Sfard, centrano il loro studio più sull'importanza e sulla difficoltà della transizione tra la concezione processo e quella oggetto. Nella prima, le nozioni matematiche sono concepite come processi dinamici, che risultano dall'interiorizzazione di azioni efficaci. Nella seconda, le nozioni matematiche sono percepite come oggetti statici che possono essere, a loro volta, coinvolti in processi più complessi. Il lavoro che essi hanno condotto sulla nozione di funzione è in qualche modo un prototipo di questi approcci [17]. Essi dimostrano bene il tipo di relazione con le funzioni che una concezione processo permette e la sua efficacia a livello di scuola secondaria. Dimostrano anche i limiti per tali concezioni: ad esempio, in analisi a livello universitario, non si è più interessati unicamente allo studio di particolari funzioni ma a quello di classi di funzioni, definite da proprietà come le condizioni di regolarità. Questi oggetti più generali sono in seguito coinvolti in nuovi processi, come per esempio l'integrazione. Questi lavori hanno anche mostrato gli effetti disastrosi delle strategie d'insegnamento che mirano troppo presto alle definizioni teoriche statiche di oggetti funzionali senza concedere tempo sufficiente alla fase «processo». Essi hanno infine mostrato che la programmazione in linguaggi specifici, come il linguaggio ISETL sviluppato da E. Dubinsky, può aiutare ad interiorizzare azioni in processi e ad incapsulare processi in oggetti, che è un passaggio più delicato.

I risultati ottenuti dalla ricerca sulle ricostruzioni necessarie all'apprendimento della matematica, sugli ostacoli epistemologici inerenti ad un tipo di apprendimento o ad un altro, e sulle difficoltà nella transizione tra processi e oggetti ci aiutano certamente a comprendere meglio le difficoltà incontrate dagli studenti e a assumere la responsabilità di queste difficoltà in maniera più efficace nel nostro insegnamento. Tuttavia, come è stato detto all'inizio di questo articolo, i risultati tendono a favorire una visione «verticale» e gerarchica dell'apprendimento della matematica e, di conseguenza, a mascherare l'importanza di ciò che ci piacerebbe descrivere come dimensione «orizzontale». Nella prossima parte, per ristabilire in qualche modo l'equilibrio tra queste due dimensioni, ci concentriamo sulle questioni di flessibilità cognitiva.

Flessibilità e apprendimento della matematica.

La conoscenza del ruolo giocato da una certa flessibilità cognitiva nel migliorare il lavoro matematico non è un'acquisizione recente. Come T. Dreyfus e T. Eisenberg [18] richiamano in un loro articolo del 1996 sulle molteplici sfaccettature dell'attività matematica, il libro *How To Solve It?* del matematico H. Polya dà prova di questo fatto. La ricerca didattica che cosa aggiunge a questi lavori iniziali? Senza alcun dubbio, essa aggiunge:

- una migliore conoscenza dei diversi tipi di flessibilità in gioco nell'attività matematica;
- la dimostrazione dei limiti delle strategie d'insegnamento, che mirano a sviluppare queste flessibilità come abilità trasversali a differenti aree, ma che non prendono seriamente in considerazione le caratteristiche proprie della conoscenza che sostiene questi tipi di flessibilità entro le aree matematiche in questione [19];
- lo sviluppo e la sperimentazione di ingegnerie didattiche che mirano a superare le disfunzioni dell'insegnamento per quanto riguarda la flessibilità.

Per illustrare questo, c'interesseremo questa volta dell'area dell'algebra lineare, più recentemente analizzata in ricerca didattica. Queste questioni sono al cuore di vari progetti di ricerca. Faremo riferimento, in particolare, alla sintesi realizzata nel lavoro [5], curato da J. L. Dorier. Come sottolinea questo autore, l'algebra lineare trova la sua sorgente in diversi ambienti matematici, che ci ha permesso in un certo senso di unificare: un ambiente geometrico, un ambiente di sistemi di equazioni lineari (a dimensione finita o infinita), un ambiente di calcolo matriciale, un ambiente di equazioni differenziali, e così via. Lo sviluppo di un'articolazione flessibile tra questi diversi ambienti, come tra ognuno di essi e l'algebra lineare astratta, appare allora una componente essenziale dell'apprendimento in quest'area. Questo sviluppo poggia, alternativamente, sull'articolazione tra livelli di linguaggio e descrizione, tra modi di ragionamento, tra «registri di rappresentazione» e tra punti di vista.

Flessibilità tra livelli di linguaggio e modi di ragionamento

In [5], J. Hillel analizza i differenti linguaggi e i modi associati di rappresentare dei costrutti nel campo dell'algebra lineare, così come i loro modi d'interazione. Principalmente, egli ne distingue tre: il linguaggio della teoria generale, il linguaggio di R^n e il linguaggio geometrico dello spazio in due e tre dimensioni, che è altresì usato in modo metaforico in dimensioni maggiori di tre. Descrive le loro caratteristiche e i loro modi d'interazione, elencando le difficoltà che possono indurre e alle quali l'insegnamento deve essere sensibile. Inoltre, analizzando registrazioni di lezioni svolte da cinque insegnanti esperti sull'argomento autovalori e autovettori, egli dà prova di cambiamenti permanenti nel linguaggio e nella notazione, di solito effettuati senza interruzione e senza alcun tentativo di avvertire gli studenti che un cambiamento sta accadendo.

A. Sierpinska, A. Defence, T. Khatcherian e L. Saldanha, ancora in [5], distinguono tre modi di ragionamento in algebra lineare: un modo *sintetico-geometrico*, in cui in una certa maniera gli oggetti sono dati direttamente nello spirito che cerca di descriverli, e due modi analitici in cui gli oggetti sono dati indirettamente. Negli ultimi due, gli oggetti sono costruiti solo mediante le definizioni e le proprietà dei loro elementi. Si tratta del modo *analitico-artimetico*, se l'oggetto è definito da una formula che permette di calcolarlo, o del modo *analitico-strutturale*, se l'oggetto è definito da un insieme di proprietà. Secondo questi autori: se si pensa alle possibili soluzioni di un sistema di tre equazioni lineari in tre incognite, immaginando la posizione rispettiva di tre piani nello spazio, si è nel modo sintetico-geometrico. Se si pensa a questo problema in termini dei possibili risultati dalla riduzione di una matrice 3×3, si è nel modo analitico-aritmetico. Si è nel modo analitico-strutturale se, per esempio, si pensa in termini di matrici singolari e regolari.

Storicamente, lo sviluppo dell'algebra lineare deve moltissimo, come gli autori sottolineano, all'interazione di questi tre modi. Ma, come mostrato dall'analisi minuziosa di situazioni di tutoraggio nell'università in cui questa ricerca è realizzata, tanto i compiti proposti agli studenti quanto le interazioni osservate tra docenti e studenti a malapena favoriscono lo sviluppo di un'abilità flessibile e coerente di questi diversi modi. Gli studenti, da parte loro, sviluppano sistemi originali di forme intermedie tra questi tre modi; ragioni di economia fanno apparire forme miste che incorporano il modo analitico-strutturale. Questa creatività, secondo gli autori, potrebbe essere una fonte d'ispirazione per l'insegnamento, essendo il problema didattico da risolvere quello di trovare degli strumenti che permettano una gestione controllata e conscia di queste diverse modalità e della loro articolazione flessibile. I dati raccolti mostrano chiaramente che questo non accade se gli studenti sono lasciati a fare ciò di loro propria iniziativa, a dispetto della loro creatività manifesta.

Flessibilità tra registri di rappresentazione

Il lavoro matematico in algebra lineare mobilita parecchi *registri di rappresentazione semiotica* (2), che includono grafici, immagini,

(2) R. Duval [20] definisce un «registro di rappresentazione semiotica» come un sistema di rappresentazioni mediante segni che permette le tre attività fondamentali legate ai processi di utilizzo dei segni: la formazione di una rappresentazione, il suo trattamento nello stesso registro, la sua conversione in un altro registro.

scrittura simbolica, linguaggio naturale, e altri. Come R. Duval [20], tra altri, sottolinea, le rappresentazioni semiotiche sono assolutamente necessarie per l'attività matematica, perché gli oggetti matematici non sono direttamente accessibili alla percezione. I registri semiotici non hanno soltanto la semplice funzione di esteriorizzare rappresentazioni mentali e di comunicare; sono essenziali al funzionamento cognitivo e alla concettualizzazione. Tuttavia, secondo lui, l'insegnamento tende a ridurli a questo ruolo di esteriorizzazione e comunicazione. Così, esso tende a vedere la capacità di riconoscere le rappresentazioni semiotiche, di formarle, di trattarle o di convertirle in un altro registro come un semplice sottoprodotto della concettualizzazione. La ricerca di K. Pavlopoulou, nella sua tesi discussa a Strasburgo nel 1994 (cf. [4]) sul coordinamento tra registri di rappresentazione in algebra lineare, mette bene in evidenza che le relazioni tra apprendimento concettuale e apprendimento semiotico sono molto più complesse. Il modulo d'insegnamento sperimentale preparato per studenti principianti, nel contesto di questa ricerca, tende ancora una volta a mostrare che l'insegnamento, quando vuole essere sensibile a questa dimensione semiotica del lavoro matematico, ci permette di superare difficoltà, per quanto resistenti esse appaiano.

Flessibilità tra punti di vista

La flessibilità nell'articolazione tra punti di vista matematici è stata evidenziata da parecchi autori, tra cui M. Alves Diaz [21] nella sua tesi discussa nel 1998 all'Università Paris VII. Una tale flessibilità interviene in algebra lineare nell'ambito delle relazioni tra i punti di vista «implicito» e «parametrico» (3). In algebra lineare, si deve spesso passare da un punto di vista all'altro — prima in termini di calcolo, successivamente in modo più metaforico. La tesi di M. Alves Diaz, condotta contemporaneamente con studenti francesi e brasiliani di vari livelli, mostra le grandi difficoltà che gli studenti incontrano nello sviluppare un'articolazione flessibile tra i due punti di vi-

(3) Rispetto ad uno spazio vettoriale, si sta pensando sullo spazio vettoriale *implicitamente* se lo si osserva come un insieme di soluzioni di un sistema di equazioni lineari, *parametricamente* se si pensa ad esso in termini di un sistema di generatori.

sta. La bassa percentuale di successo a ogni livello nella risoluzione del seguente semplice esercizio chiarifica le questioni.

> In R^3, sia $a = (2, 3, -1)$, $b = (1, -1, 2)$, $c = (5, 0, 7)$ e $d = (0, 0, 1)$. Trovare una rappresentazione implicita dell'intersezione degli spazi vettoriali E e F generati rispettivamente da $\{a, b\}$ e $\{c, d\}$.

Risolvere questo esercizio, secondo il modo che è stato insegnato a questi studenti, richiede di passare da una rappresentazione parametrica a una rappresentazione implicita per ognuno dei due sottospazi E e F, attraverso un'eliminazione gaussiana; allora l'unione degli insiemi di equazioni ottenuti per ognuno di essi è la risposta richiesta ([4]).

La soluzione di questo problema porta in particolare a numerose sviste formali. Gli studenti confondono coordinate con parametri e concludono con intersezioni che sono in R^2 o R^4 piuttosto che in R^3. Essi associano brutalmente equazioni con vettori, e così via. Chiaramente gli indizi provenienti dal campo geometrico, che dovrebbero essere semplici da utilizzare, sono stati invece poco utilizzati dagli studenti intervistati. Quando l'intuizione geometrica è stata usata, non è stata necessariamente usata in modo efficace. Alla fine, contrariamente a quanto si potrebbe pensare, la percentuale di successi non è migliorata quando ci si rivolge a studenti più avanzati.

Ciò che questa ricerca mostra bene, attraverso l'analisi dei libri di testo rappresentativi nei due paesi, è la scarsa sensibilità a queste difficoltà che l'insegnamento sembra mostrare. Certamente, gli studenti sono in grado di usare in modo automatico le tecniche di soluzione che permettono loro di padroneggiare tecnicamente l'articolazione, ma questa capacità non è sufficiente a dare a questa un significato, a permettere loro di gestirla e di controllarla in modo efficace.

La dualità, quando viene introdotta più tardi, dovrebbe permettere loro di ripensare a questa articolazione e di comprendere meglio

([4]) Lasciateci sottolineare, però, la perturbazione che nasce qui nell'usare la tecnica standard: l'equazione del sottospazio F è $y = 0$, un'equazione che può essere d'altra parte ottenuta senza il minimo calcolo.

il ruolo che gioca in essa l'associazione di equazione con vettore. Ma il mondo tecnico dei sistemi e il mondo teorico della dualità, come sono classicamente presentati, rimangono per molti studenti attuali due mondi connessi tra loro troppo debolmente.

Senza dubbio, sarebbe necessario costruire un discorso intermedio che permetta agli studenti di sistemare i mezzi per una gestione ponderata del lavoro tecnico d'articolazione. La storia dello sviluppo della nozione di rango, come analizzata in [5], fornisce interessanti spunti su questo soggetto, aiutandoci a restituire a questa articolazione una complessità che le presentazioni moderne, nella loro apparente semplicità, tendono a farci dimenticare. Questa complessità non appare nei libri di testo, in cui si assume che l'abilità ad articolare punti di vista sia automatica, una volta che sono disponibili le tecniche per essa.

Questo effetto debole delle tecniche di insegnamento tradizionali per quanto riguarda l'articolazione non è un fenomeno isolato. Se sia una questione di articolazione di ambienti, di registri, o di punti di vista, l'analisi tende a mostrare che è difficile per l'insegnamento assumersi la responsabilità per l'apprendimento del pensiero indipendente come parte dell'articolazione. La flessibilità sembra essere considerata come automaticamente interiorizzata una volta che si è «compresa» la nozione, come se fosse una semplice questione di compito per casa, che si può lasciare al lavoro privato dello studente. La ricerca mostra che questo sfortunatamente non è ciò che accade. Mostra anche che la flessibilità non è al di fuori della sfera di ciò che può essere insegnato, se si fosse attenti al suo sviluppo. I lavori sopra citati tendono ad evidenziare questo nel caso dell'algebra lineare, ed è anche il caso dell'analisi. Molte ricerche effettuate nella seconda area mostrano, in particolare, che la tecnologia informatica, se il suo utilizzo fosse attentamente meditato, potrebbe giocare un ruolo decisivo nello sviluppo di un'articolazione flessibile tra i registri algebrico e grafico e potrebbe rendere questa articolazione uno strumento realmente efficiente dell'attività matematica [3].

La mia personale ricerca sull'insegnamento delle equazioni differenziali va nella stessa direzione [17], mostrando decisamente come l'uso della tecnologia informatica possa costruire approcci attraverso soluzioni qualitative percorribili, persino con studenti principianti, e possa portare l'insegnamento universitario più vicino allo sviluppo attuale del campo. Ma la ricerca sottolinea anche che la fattibilità di queste nuove strategie d'insegnamento richiede importanti cambiamenti nello statuto del registro grafico. Infatti, con i principianti, la possibilità di realizzazione richiede l'accettazione di dimostrazioni qualitative basate su specifici argomenti grafici. Questo è difficile da negoziare con i docenti universitari, almeno in Francia, dove tali dimostrazioni non sono generalmente accettate a questo livello universitario.

Potenziale e limiti del lavoro di ricerca.

Come questo articolo ha cercato di mostrare, la ricerca effettuata a livello universitario ci aiuta a comprendere meglio le difficoltà nell'apprendimento che i nostri studenti devono fronteggiare, la sorprendente resistenza a soluzioni di alcune di queste difficoltà, i limiti e le disfunzioni delle nostre pratiche d'insegnamento. In vari casi, la ricerca ha condotto allo sviluppo di progetti d'insegnamento che si sono rivelati efficaci, almeno in ambienti sperimentali. Questo articolo dà solo una visione molto parziale della diversità del lavoro di ricerca e dei risultati ottenuti con essa. A causa del poco spazio, abbiamo scelto di mettere a fuoco pochi punti e di ometterne altri che sono certamente anche molto importanti. Ma la presentazione qui, anche se solo parziale, dovrebbe essere abbastanza ricca da permettermi di discutere qualche limite del lavoro di ricerca nel suo stato presente e di suggerire qualche tema per sviluppi futuri.

Quanto alla ricerca intrapresa fino ad ora, la mia opinione è che gli sforzi sono stati concentrati solo su poche aree rispetto alla diversità di argomenti di matematica insegnati a livello universitario. Come era stato sopra detto, lo sforzo principale si è avuto con l'analisi, un'area matematica che era vista come la principale fonte di insuccessi per gli studenti universitari. Più recentemente, i ricercatori hanno indagato nel campo dell'algebra lineare, e importanti progetti stanno ora procedendo. Ma importanti aree come la probabilità e la statistica restano scarsamente investigate. Inoltre, la mia opinione è che la ricerca in didattica della matematica, nel complesso, abbia più o meno consapevolmente preso come punto di riferimento l'addestramento di futuri matematici, a spese della grande varietà di studenti che scelgono corsi di matematica a livello universitario. Senza dubbio, la ricerca in didattica della matematica deve in parte essere nuovamente orientata per dare lo spazio che merita alle questioni legate alla formazione matematica degli insegnanti elementari e secondari e, più globalmente, alla formazione matematica di tutti i tipi di professionisti.

Secondo il mio punto di vista, il modo in cui la questione delle tecnologie informatiche è stata generalmente affrontata sino ad ora, evidenzia queste limitazioni. Ci si concentra, soprattutto, sulle modalità con cui le tecnologie informatiche possono sorreggere la concettualizzazione e la flessibilità cognitiva riconosciuta come una sua componente essenziale. La ricerca non studia con la stessa cura ciò che è realmente un'attività matematica professionale coadiuvata dalle tecnologie informatiche, tanto quanto quelle che sono le sue necessità matematiche specifiche e non specifiche. Queste necessità potrebbero dipendere da specificità professionali se si volesse superare il semplice statuto di utilizzatore e diventare un utente efficiente e critico. Come conseguenza, la ricerca non presta abbastanza attenzione ai modi in cui la conoscenza corrispondente può essere costruita in corsi di matematica ordinari o di servizio. Tuttavia, questa è una reale sfida che abbiamo di fronte oggi, prendendo in considerazione il fatto che all'università il nostro principale interesse non è più lo sviluppo di un qualche tipo di cultura matematica generale.

I limiti del lavoro di ricerca non sono solo quelli menzionati sopra, che sono legati allo stato di sviluppo del campo. Come docenti universitari, siamo di fronte ad altri più fondamentali. Ci piacerebbe che la ricerca ci fornisse mezzi facili e piuttosto economici per migliorare le nostre strategie d'insegnamento. Ma come ricercatrice, devo ammettere che solo raramente la ricerca ci dà prove che, attraverso adattamenti minimi ed economici, possiamo ottenere sostanziali miglioramenti. Al contrario, la maggior parte dei progetti di ricerca, che sono stati dimostrati efficaci, richiede più impegno ed esperienza da parte degli insegnanti e significativi cambiamenti nelle pratiche. Una ragione essenziale è che i problemi non riguardano solo il contenuto dell'insegnamento (non è sufficiente scrivere o adottare nuovi libri di testo); i problemi sono legati alle forme di lavoro degli studenti, ai modi d'interazione tra docenti e studenti, e alle forme e al contenuto della valutazione degli studenti. I cambiamenti non sono facili da raggiungere; essi richiedono tempo e sostegno istituzionale e non sono semplicemente una questione di buona volontà personale.

Un altro punto cruciale è la complessità dei sistemi in cui i processi d'insegnamento e d'apprendimento hanno luogo. A causa di questa complessità, la conoscenza che possiamo dedurre dalla ricerca didattica, per quanto utile sia, è necessariamente molto parziale. I modelli che possiamo elaborare sono necessariamente semplicistici. Come matematici siamo ben consapevoli del fatto che possiamo imparare moltissimo persino da modelli semplicistici, ma non possiamo aspettarci che questi ci diano i mezzi per controllare realmente i sistemi didattici. Così dobbiamo essere realisti nelle nostre aspettative e cauti con le generalizzazioni. Questo non significa, secondo la mia opinione, che il mondo della ricerca e il mondo della pratica debbano vivere e svilupparsi separatamente — lungi da questo. Ma sono convinta che trovare i modi di rendere la conoscenza, basata sulla ricerca, utile al di fuori delle comunità didattiche e degli ambienti sperimentali, dove essa si sviluppa, non possa essere un compito lasciato unicamente alla responsabilità dei ricercatori. È il nostro comune compito.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. Sierpinska - J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.

[2] D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer, Dordrecht, 1991.

[3] D. Tall, *Function and calculus*, International Handbook of Mathematics Education (A. J. Bishop et al., eds.), Kluwer, Dordrecht, 1996, 289-325.

[4] M. Rogalski (ed.), *Analyse épistémologique et didactique des connaissances à enseigner au lycée et à l'université*, Recherches en Didactique des Mathématiques, Spécial issue 18 (1998).

[5] J. L. Dorier (ed.), *L'enseignement de l'Algèbre Linéaire en Question*, La Pensée Sauvage, Grenoble, 1997 (Traduzione inglese: *On the Teaching of Linear Algebra*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000).

[6] G. Brousseau, *The Theory of Didactic Situations*, Kluwer, Dordrecht, 1997.
[7] Y. Chevallard, *Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique*, Recherches en Didactique des Mathématiques, **12** (1992), 73-128.
[8] F. Praslon, *Continuité et rupture dans la transition terminale S/DEUG Sciences en analyse. Le cas de la notion de dérivée et son environnement*, Tesi di Dottorato di Ricerca, Université Paris VII, 2000.
[9] C. Castela, *Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures: le cas de la notion de tangente*, Recherches en Didactique des Mathématiques, **15** (1995), 7-47.
[10] M. Artigue, *Learning and teaching elementary analysis, 8th International Congress on Mathematics Education — Selected Lectures* (C. Alsina et al., eds.), S.A.E.M. Thalès, Sevilla, 1996, 15-30.
[11] M. Artigue et al., *Procédures Différentielles dans les Enseignements de Mathématiques et de Physique au Niveau du Premier Cycle Universitaire*, preprint, IREM Paris VII, Paris, 1989.
[12] M. Legrand, *La problématique des situations fondamentales et l'approche anthropologique*, Repères IREM, no. 27 (1997), 81-125.
[13] R. Douady, *Dialectique outil/objet et jeux de cadres*, Recherches en Didactique des Mathématiques, **7** (1987), 5-32.
[14] H. Poincare, *Les définitions en mathématiques*, L'Enseignement des Mathématiques, **6** (1904), 255-283.
[15] I. Lakatos, *Proofs and Refutations, the Logic of Mathematical Discovery*, Cambridge University Press, Cambridge, New York, and Melbourne, 1976.
[16] G. Bachelard, *La Formation de l'Esprit Scientifique*, J. Vrin, Paris, 1938.
[17] E. Dubinski - G. Harel (eds.), *The Concept of Function: Some Aspects of Epistemology and Pedagogy*, MAA Notes, vol. **25**, Mathematical Association of America, Washington, DC, 1992.
[18] T. Dreyfus - T. Eisenberg, *On different facets of mathematical thinking*, The Nature of Mathematical Thinking (R. J. Sternberg and T. Ben-zeev, eds), Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Mahwah, NJ, 1996, 253-284.
[19] A. H. Schoenfeld, *Mathematical Problem Solving*, Academic Press, 1985.
[20] R. Duval, *Sémiosis et Pensée Humaine*, Peter Lang, Paris, 1996.
[21] M. Alves Dias, *Les problèmes d'articulation entre points de vue cartésien et paramétrique dans l'enseignement de l'algèbre linéaire*, Tesi di Dottorato di Ricerca, Université Paris VII, 1998.

Michele Artigue è professore di matematica all'Università Paris VII Denis Diderot. Il suo indirizzo di posta elettronica è Michele.Artigue@gauss.math.jussieu.fr