Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Silvia Bertirotti

Semicontinuità inferiore di funzionali integrali nel caso vettoriale e buona posizione nel calcolo delle variazioni

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.3, p. 275–278.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_3_275_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie 8, Vol. III-A, Dicembre 2000, 275-278

Semicontinuità inferiore di funzionali integrali nel caso vettoriale e buona posizione nel calcolo delle variazioni.

SILVIA BERTIROTTI

1. – Introduzione.

I risultati ottenuti forniscono un contributo allo studio di due differenti problematiche nel Calcolo delle Variazioni. La prima è il ben noto problema della semicontinuità inferiore di funzionali integrali e l'altra riguarda la buona posizione dei problemi di minimo globale. Infine studio la buona posizione per problemi vincolati in un contesto astratto proponendo una definizione di buona posizione che rafforza la nota nozione di buona posizione secondo Levitin-Polyak.

2. – Semicontinuità inferiore di funzionali integrali nel caso vettoriale.

Le semicontinuità inferiore di una funzione in generale equivale alla chiusura dei sottolivelli della funzione rispetto ad una determinata topologia sul dominio. In particolare dimostro la semicontinuità inferiore, rispetto alla topologia debole sul dominio, del funzionale

$$F(u) = \int_{\Omega} f(u(x),\, det\, Du(x))\, dx \tag{1}$$

dove Ω è un aperto limitato di $\mathbf{R}^N$, $u \in W^{1,q}(\Omega, \mathbf{R}^N)$ e f è un' integranda convessa.

Considero il problema con ipotesi di minore regolarità per l'integranda; in particolare assumo che l'integranda convessa f sia semplicemente misurabile rispetto alla prima variabile e considero f tale che $f(s, t) = +\infty$ se e solo se $t \leq 0$, mentre nei risultati noti in letteratura l'assunzione $f(s, 0) < +\infty$ per ogni s è di fondamentale importanza. Il teorema di semicontinuità è quindi un risultato originale. Le condizioni considerate sull'integranda sono usualmente verificate dalle integrande dei funzionali dell'energia, considerati nell'ambito dell'elasticità non lineare.

3. – Buona posizione nel calcolo delle variazioni.

La questione è direttamente collegata al problema della stabilità delle soluzioni dei problemi variazionali rispetto a perturbazioni delle integrande (con dati al bordo fissati) proposto da Ulam in [3] (p. 68) ed ha rapporti con i risultati classici di epi-convergenza per funzionali integrali, i quali però garantiscono la sola convergenza debole delle soluzioni. Queste problematiche sono affrontate attraverso gli strumenti della teoria della buona posizione applicati a problemi di minimo globale per funzionali integrali del tipo

$$F(u) = \int_{\Omega} f(x, u(x), \nabla u(x))\, dx \tag{2}$$

definiti su uno spazio di Sobolev $W_0^{1,q}(\Omega)$, dove Ω è un aperto limitato di $\mathbf{R}^N$.

In sintesi un problema si dice ben posto se la soluzione, oltre ad esistere ed essere unica, dipende con continuità dai dati del problema (buona posizione secondo Hadamard). Negli anni sessanta A. Tikhonov introdusse un concetto nuovo di buona posizione: un problema è ben posto se la soluzione esiste ed è unica, e se ogni successione minimizzante converge ad essa.

Esistono solo pochi risultati di buona posizione nella teoria classica (si veda ad esempio il Capitolo VIII in [1]). Io considero una definizione di buona posizione che comprende entrambe le definizioni precedenti. Questa nozione, che tiene conto degli effetti di perturbazioni parametriche di un dato problema di ottimizzazione, è nota come buona posizione per perturbazioni ed è stata introdotta in [4]. Essa consiste nell'immersione del problema di minimo in una famiglia di problemi dello stesso tipo, denotata con $(W_0^{1,q}(\Omega), I(\cdot, p))$ e parametrizzata dagli elementi p di uno spazio dotato di una struttura di convergenza e richiede la convergenza delle successioni asintoticamente minimizzanti v_n (i.e. $I(v_n, p_n) - \inf I(\cdot, p_n) \to 0$, per $n \to +\infty$), al punto di minimo del problema non perturbato.

Recenti risultati di A. D. Ioffe e A. J. Zaslavski [2] dimostrano che i problemi variazionali sono "genericamente" ben posti rispetto ad una topologia relativa alla convergenza uniforme modulo una data crescita.

Più precisamente ho studiato la "più debole" struttura di convergenza, sullo spazio delle integrande, che garantisca la convergenza forte (nell'appropriato spazio di Sobolev) delle soluzioni approssimate, alla soluzione esatta del problema originale. Per questo è necessario introdurre una nuova nozione di convergenza variazionale che risulta essere un indebolimento della epi-convergenza:

DEFINIZIONE 1. – *Siano $J, J_n: X \to (-\infty, +\infty]$. Si dice che J_n convergono variazionalmente a J, $J_n \xrightarrow{VAR} J$, se e solo se*

1. $x_n \to x$ *implies* $\liminf_n J_n(x_n) \geq J(x)$,
2. *per ogni* $x \in X$ *esiste una successione* x_n *tale che* $\limsup_n J_n(x_n) \leq J(x)$.

Nel caso $N = 1$ dimostro che, per perturbazioni additive dell'integranda che non coinvolgono la variabile derivata e rispetto alla convergenza variazionale il problema risulta ben posto per perturbazioni.

Più precisamente dimostro che un problema ben posto secondo Tikhonov risulta anche ben posto per perturbazioni dell'integranda legate alla convergenza variazionale dei rispettivi funzionali integrali. Pertanto le nuove integrande non sono necessariamente vicine a quella del problema originale nella metrica uniforme e questo consente di ampliare la classe delle perturbazioni ammissibili.

Si osserva inoltre che si sono considerate integrande localmente lipschitziane e non è stata fatta alcuna ipotesi di stretta convessità sulle integrande rispetto all'ultima variabile, né di regolarità.

Ho proposto poi risultati di buona posizione del problema di minimo anche per la classe degli integrali multipli definiti su uno spazio di funzioni a valori reali. Assumendo $q < N$, la maggiore difficoltà consiste nel fatto che l'immersione dello spazio $W_0^{1,q}(\Omega)$ in $C(\overline{\Omega})$ non risulta compatta e pertanto, sebbene le successioni asintoticamente minimizzanti risultino compatte, non si ha alcuna informazione riguardo alla limitatezza puntuale delle stesse. Supero questa difficoltà costruendo una nuova successione limitata in L^∞, che risulta ancora asintoticamente minimizzante ed è vicina all'originale nelle norma $W^{1,1}$. Il principale strumento di questa costruzione è il principio variazionale di Ekeland. Ottengo quindi la convergenza forte in $W^{1,1}$ delle successioni asintonticamente minimizzanti al punto di minimo del problema non perturbato.

Inoltre, nel caso che Ω sia un intervallo, ho proposto una condizione sufficiente, più debole dell'ipotesi di stretta convessità, che garantisce la buona posizione nel senso di Tikhonov del problema di minimo per funzionali del calcolo delle variazioni; per due classi di funzionali riesco ad ottenere una stima a priori della soluzione ottimale e della sua derivata, che permette di dimostrare il risultato di buona posizione secondo Tikhonov in ipotesi di convessità locale.

Infine, dal momento che in letteratura sono noti criteri per ottenere la epiconvergenza di una successione di funzionali solo in ipotesi di convessità, ho definito un'opportuna convergenza sulle integrande atta a garantire la convergenza variazionale della successione dei corrispondenti funzionali integrali non necessariamente convessi. Tale nozione di convergenza non è confrontabile con la convergenza puntuale.

4. – Buona posizione secondo Levitin-Polyak.

In ambito astratto studio la buona posizione di problemi di minimo vincolati. Denoto con (A, F) il problema di minimizzare la funzione F rispetto al vincolo A. In molti casi diventa necessario prendere in considerazione l'andamento della funzione F in un intorno del vincolo (come succede in alcune note tecniche di calcolo). Levitin e Polyak per primi considerarono successioni minimizzanti per

(A, F) che violano il vincolo A. In questa tesi introduco una definizione di buona posizione per il problema vincolato che generalizza quella di Levitin e Polyak in quanto permette di considerare anche perturbazioni del vincolo stesso. Definisco questa nuova nozione con il nome di buona posizione secondo Levitin-Polyak per perturbazioni.

Essa consiste nell'immergere il problema originale (A, F) in una famiglia di problemi vincolati $(A_p, I(\cdot, p))$ parametrizzata dagli elementi di uno spazio metrico. Inoltre occorre tenere presente che la successione $I(x_n, p_n) - \inf(A_{p_n}, I(\cdot, p_n))$, per particolari successioni asintoticamente minimizzanti x_n può assumere valori anche negativi.

Quindi dimostro una caratterizzazione geometrica della buona posizione secondo Levitin-Polyak per perturbazioni simile alla ben nota caratterizzazione data da Furi e Vignoli per la buona posizione di Tikhonov.
Infine fornisco un' ulteriore caratterizzazione della buona posizione del problema (A, F) attraverso una stima del modulo di buona posizione.

BIBLIOGRAFIA

[1] A.L. Dontchev, T. Zolezzi, *«Well-posed optimization problems»*, Lecture Notes in Math. 1543, Springer-Verlag, 1993.
[2] A. Ioffe, Lecture held at the «VI Workshop on Wellposedness and Stability of Optimization problems», Sozopol, 1997.
[3] S.M. Ulam, *«A Collection of Mathematical Problems»*, Los Alamos, 1958.
[4] T. Zolezzi, *«Well-posedness criteria in optimization with application to the Calculus of Variations»*, Nonlinear Anal. T M A, **25** (1995), 437-453.

Dipartimento di Matematica, Università di Genova
e-mail: bertirotti@dima.unige.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Torino) - Ciclo X
Direttore di ricerca: Prof. Tullio Zolezzi, Università di Genova