Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Alessandra Biglio

Stabilità e stabilizzabilità di sistemi non lineari discreti

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.3, p. 283–286.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_3_283_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie 8, Vol. III-A, Dicembre 2000, 283-286

Stabilità e stabilizzabilità di sistemi non lineari discreti.

ALESSANDRA BIGLIO

1. – Introduzione.

La tesi si situa nell'ambito della teoria matematica dei controlli; in particolare, si studiano sistemi dinamici la cui evoluzione è osservata ad intervalli di tempo regolari. Tali sistemi sono governati da equazioni alle differenze finite del tipo

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k) \tag{1}$$

dove $k \in \mathbb{N}$ (con $\mathbb{N}$ si intende l'insieme dei numeri naturali, zero incluso), $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ e $f(0, 0) = 0$. Si osserva che il comportamento del sistema non dipende soltanto dallo stato iniziale x_0, ma anche da una sequenza di segnali in ingresso $\boldsymbol{u} = \{u_0, u_1, u_2, \ldots\}$. Se $u_k = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ il sistema si dice *isolato* e l'origine è un punto di equilibrio.

Il cosiddetto metodo di Liapunov assicura la stabilità (semplice o asintotica) di punti di equilibrio, oppure la stabilità nel senso di Lagrange di un sistema isolato, purché si possa garantire l'esistenza di una funzione V con certe caratteristiche, tra cui la continuità. Si può mostrare che tali teoremi, ad eccezione di quello sulla stabilità asintotica, non sono invertibili, in quanto non è possibile trovare una funzione di Liapunov continua per alcuni sistemi stabili (o stabili nel senso di Lagrange). Auslander e Seibert ([1]) hanno mostrato che, per sistemi isolati in tempo continuo, l'esistenza di una funzione di Liapunov *continua* è equivalente ad una stabilità di un tipo più restrittivo, chiamata stabilità *assoluta*. Per caratterizzarla, essi hanno utilizzato il concetto di prolungazione, proposto da T. Ura.

In questa tesi, si è cercato di estendere alcuni risultati relativi alla stabilità dei sistemi non lineari in tempo continuo al tempo discreto e ai sistemi con ingressi. La difficoltà principale in questa trasposizione sta nel fatto che le traiettorie non sono, come ovvio, connesse e quindi l'estensione dei risultati e, in certi casi, anche delle definizioni, ha richiesto nuove impostazioni e risoluzioni.

2. – Prolungazioni per sistemi in tempo discreto.

Sia $\varphi(k; x_0, \boldsymbol{u})$ la soluzione del sistema (1) uscente da x_0, associata alla successione di ingressi $\boldsymbol{u} = \{u_0, u_1, u_2, \ldots\}$ e osservata al tempo k; siano $\mathcal{A}(k, x)$ l'insieme raggiungibile da x al tempo k e $\mathcal{A}(x) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{A}(k, x)$ l'insieme raggiungibile da x. La mappa multivoca $\mathcal{A}: x \mapsto \mathcal{A}(x)$ è chiamata *mappa raggiungibile*.

Sia Q una mappa multivoca da $\mathbb{R}^n$ in sé (le potenze di Q sono definite per ricorrenza: $Q^n(x) = Q(Q^{n-1}(x))$ e $Q^0(x) = Q(x)$). Si definiscono due operatori su mappe multivoche:

$$\mathcal{D}Q(x) := \bigcup_{\delta > 0} \overline{Q(\mathcal{B}(x, \delta))}, \qquad \mathcal{S}Q(x) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q^n(x) \tag{2}$$

dove $\mathcal{B}(x, \delta)$ è la sfera di centro x e raggio $\delta > 0$ nello spazio $\mathbb{R}^n$.

DEFINIZIONE 1. – *Una prolungazione è una mappa multivoca Q tale che*

(PC1) *per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ si ha $\mathcal{A}(x) \subseteq Q(x)$;*

(PC2) $\mathcal{D}Q = Q$;

(PC3) *se A è un insieme compatto e $x \in A$, esiste un compatto $B \supset A$ tale che $Q(x) \subseteq A$ oppure $Q(x) \cap (B \backslash \mathring{A}) \neq \emptyset$.*

La proprietà (PC3) differisce dal caso continuo ([1]) in quanto le traiettorie non sono insiemi connessi e non si può garantire che esse intersechino la frontiera di un compatto. Si può mostrare che se gli ingressi sono limitati, cioè appartengono ad un insieme compatto di $\mathbb{R}^m$, ed f è continua, la mappa raggiungibile $\mathcal{A}$ è una mappa multivoca con la proprietà (PC3). Se scegliamo un numero positivo R ed una sequenza di ingressi $\|\boldsymbol{u}\|_\infty \leq R$, (dove $\|\boldsymbol{u}\|_\infty$ è la norma l^∞ per la successione $\boldsymbol{u}$) denotiamo la mappa raggiungibile con $\mathcal{A}_R$: si può mostrare che $\mathcal{D}\mathcal{A}_R$ è una prolungazione controllata. Definiamo

$$D_{1,R} := \mathcal{D}(\mathcal{S}\mathcal{A}_R)$$

la prima prolungazione controllata di $\mathcal{A}$ dove $\|\boldsymbol{u}\|_\infty \leq R$.

Sia α un numero ordinale. Per induzione transfinita definiamo

$$D_{\alpha,R} := \mathcal{D}\Big[\bigcup_{\beta < \alpha} (\mathcal{S}D_{\beta,R})\Big].$$

Nel caso di sistemi isolati abbiamo $\|\boldsymbol{u}\|_\infty = 0$; in tal caso omettiamo il pedice 0.

Si può mostrare che tali prolungazioni danno origine ad insiemi via via più grandi, e tale crescita si arresta certamente con la prolungazione $D_{\gamma,R}$, dove γ è il primo ordinale non numerabile.

Un sistema con ingressi della forma (1) si dice *uniformemente stabile nel senso bounded-input-bounded-state* (acronimo: UBIBS) rispetto all'ingresso (considerato come un segnale di disturbo) se per ogni $R > 0$ esiste $S > 0$ tale che per ogni condizione iniziale x_0 e per ogni successione limitata di ingressi $\boldsymbol{u} = \{u_0, u_1, \dots\}$ si abbia che

$$\text{se } |x_0| \leq R \text{ e } \|\boldsymbol{u}\|_\infty \leq R \text{ allora } |\varphi(k; x_0, \boldsymbol{u})| \leq S \text{ per ogni } k \in \mathbb{N}.$$

DEFINIZIONE 2. – *Una funzione di Liapunov per il sistema* (1) *è una mappa $V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con le proprietà seguenti:*

(H1) *per ogni $R > 0$ esiste $\varrho > 0$ tale che $V(f(x, \boldsymbol{u})) - V(x) \leq 0$ per ogni $|x| \geq \varrho$ e ogni $\|\boldsymbol{u}\|_\infty \leq R$.*

(H2) V è radialmente illimitata.

Nella tesi mostriamo che l'esistenza di una funzione di Liapunov continua implica la stabilità UBIBS del sistema (1). Si osserva che l'implicazione inversa è falsa: come controesempio si può considerare il sistema

$$x_{k+1} = x_k + \sin^2 x_k. \tag{3}$$

Si può mostrare che l'esistenza di una funzione di Liapunov continua è equivalente ad un tipo di stabilità più forte:

DEFINIZIONE 3. – *Il sistema* (1) *è assolutamente stabile nel senso bounded-input-bounded-state* (*acronimo:* ABIBS) *se per ogni* $R > 0$ *esiste* $S > 0$ *tale che, se* $\|\boldsymbol{u}\|_\infty \leq R$, *allora*

$$D_{\gamma, R}(\overline{\mathcal{B}(R)}) \subseteq \overline{\mathcal{B}(S)},$$

dove γ *è il primo ordinale non numerabile.*

Tale equivalenza è uno dei risultati principali contenuti nella tesi (in (1) f è continua).

Nel caso di sistemi isolati la stabilità UBIBS si traduce nella stabilità nel senso di Lagrange, mentre la stabilità ABIBS si traduce in una stabilità Lagrange assoluta. Un discorso simile può essere fatto per sistemi isolati: fu proprio questo il caso studiato in [1] per sistemi in tempo continuo. Sappiamo che l'origine è *stabile* per il sistema isolato se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni x_0 con $|x_0| < \delta$ e per ogni intero k si ha $|\varphi(k; x_0)| < \varepsilon$, dove $\varphi(k; x_0)$ è la soluzione uscente da x_0 osservata al tempo k. Il seguente risultato è un caso particolare di uno dei risultati contenuti nella tesi:

TEOREMA 1. – *L'origine è assolutamente stabile per il sistema isolato, cioè* $D_\gamma(0) = \{0\}$, *se e solo se esiste una funzione continua definita in un intorno positivamente invariante dell'origine* H *con le proprietà:*

(L1) *per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $\lambda > 0$ *tale che* $V(x) > \lambda$ *se* $x \notin \mathcal{B}(\varepsilon)$;

(L2) *per ogni* $\lambda > 0$ *esiste* $\eta > 0$ *tale che* $V(x) < \lambda$ *se* $x \in \mathcal{B}(\eta)$;

(L3) *se* $x \in H$ *e* $k \in \mathbb{N}$ *allora* $V(\varphi(k; x)) \leq V(x)$.

3. – Stabilizzabilità di sistemi affini nel controllo.

Ricordiamo che il sistema (1) è stabilizzabile se esiste una funzione $u(x)$, con $u(0) = 0$, tale che il sistema autonomo

$$x_{k+1} = f(x_k, u(x_k)) \tag{4}$$

sia asintoticamente stabile.

Consideriamo il sistema in tempo discreto lineare nel controllo

$$x_{k+1} = f(x_k) + g(x_k)\, u_k \tag{5}$$

con $f(0)=0$, $x_k \in \mathbb{R}^n$, $u_k \in \mathbb{R}^m$, dove $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n,m}$ sono funzioni continue su $\mathbb{R}^n$. In [2], Jurdjevic e Quinn trovano, per un sistema in tempo continuo e lineare nel controllo per cui esiste una funzione di Liapunov $V \in C^1$, che un feedback stabilizzante è del tipo $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = -\nabla V(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ sotto opportune ipotesi sulle funzioni V, $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{g}$.

Proponiamo un analogo di [2] in tempo discreto, osservando che le condizioni (H1) e (H2) sono la traduzione nel caso del tempo discreto delle ipotesi presenti nel lavoro citato, mentre (H3) e (H4) si rendono necessarie nel caso discreto; inoltre occorre richiedere che $V \in C^2$.

TEOREMA 2. – *Consideriamo il sistema in tempo discreto* (5): *se*

(H1) *esiste una funzione* $V:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *definita positiva,* $V \in C^2(\mathbb{R}^n)$, *tale che*

$$V(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) - V(\boldsymbol{x}) \leq 0\,,$$

(H2) *gli insiemi*

$$A = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \text{ tali che } V(\boldsymbol{f}^{i+1}(\boldsymbol{x})) = V(\boldsymbol{f}^{i}(\boldsymbol{x}x)) \text{ per } i = 0, 1, \ldots\}$$

$$B = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \text{ tali che } \nabla V(\boldsymbol{f}^{i+1}(\boldsymbol{x}))\,\boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}^{i}(\boldsymbol{x})) = 0 \text{ per } i = 0, 1, \ldots\}$$

soddisfano $A \cap B = \{\boldsymbol{0}\}$,

(H3) *esiste una costante positiva* M_1 *tale che* $\|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\| \leq M_1$ *per ogni* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$,

(H4) *esiste una costante positiva* M_2 *tale che* $\|HV(\boldsymbol{x})\| \leq M_2$ *per ogni* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ *dove* $HV \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *è la matrice hessiana di* V, *allora esiste un numero reale* $\overline{\alpha}$ *strettamente positivo tale che, per ogni* α *con* $0 < \alpha < \overline{\alpha}$ *il feedback continuo* $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = -\alpha[\nabla V(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))\,\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})]^t$ *dove* t *indica l'operazione di trasposizione, stabilizza il sistema* (5).

BIBLIOGRAFIA

[1] AUSLANDER J. e SEIBERT P., *Prolongations and stability in dynamical systems*, Annales de l'Institut Fourier de Grenoble, **14, 2** (1964), 237-268.
[2] JURDJEVIC V. e QUINN J.P., *Controllability and Stability Journal of Differential Equations*, **28** (1978), 381-389.
[3] LASALLE J.P., *The Stability and Control of Discrete Processes Applied Mathematical Sciences*, Springer-Verlag, **62** (1986).

Dipartimento di Matematica del Politecnico di Torino
e-mail: biglio@calvino.polito.it
Dottorato di ricerca in Matematica (Sede amministrativa: Università di Genova) - Ciclo XI
Direttore di ricerca: Prof. Andrea Bacciotti (Politecnico di Torino)