Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Riccardo Camerlo

Applicazioni della teoria descrittiva degli insiemi a problemi di classificazione per classi di strutture e relazioni d'equivalenza

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.3, p. 291–294.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_3_291_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie 8, Vol. III-A, Dicembre 2000, 291-294

Applicazioni della teoria descrittiva degli insiemi a problemi di classificazione per classi di strutture e relazioni d'equivalenza.

RICCARDO CAMERLO

La teoria descrittiva degli insiemi indaga sottoinsiemi definibili in spazi polacchi (spazi topologici separabili e completamente metrizzabili). Poiché in gran misura gli oggetti matematici si possono formalizzare come elementi di opportuni spazi polacchi, i metodi di teoria descrittiva degli insiemi forniscono un potente strumento per lo studio di problemi di classificazione che si presentano in varie parti della matematica.

Dato uno spazio polacco X, si indica con $\mathbf{B}(X)$ l'insieme dei *boreliani* di X, cioè la più piccola σ-algebra contenente gli aperti di X. $\boldsymbol{\Sigma}_1^1(X)$ indica la famiglia dei sottoinsiemi *analitici* di X, cioè la famiglia dei sottoinsiemi di X che sono immagini continue di boreliani. Il complementare di un insieme analitico si dice *coanalitico*; $\boldsymbol{\pi}_1^1(X)$ è la classe dei sottoinsiemi coanalitici di X. Un insieme $A \in \boldsymbol{\Pi}_1^1(X)$ si dice *coanalitico completo* (o $\boldsymbol{\Pi}_1^1$-*completo*) se, per ogni spazio polacco Y e ogni $B \in \boldsymbol{\Pi}_1^1(Y)$, esiste una funzione continua $f : Y \to X$ tale che $B = f^{-1}(A)$.

Un classico teorema di Lusin asserisce che, se A, A' sono sottoinsiemi analitici disgiunti di uno spazio polacco X, esiste un boreliano B di X che li separa, cioè tale che $A \subseteq B$, $A' \cap B = \emptyset$. Invece, in ogni spazio polacco più che numerabile, esistono sempre due sottoinsiemi coanalitici disgiunti C, C' *borelianamente inseparabili*, cioè tali che $\forall B \in \mathbf{B}(X)$ $(C \subseteq B \Rightarrow B \cap C' \neq \emptyset)$.

Tale risultato ammette un notevole rafforzamento.

TEOREMA 1. – *Sia $L = \{R\}$ un linguaggio costituito da un simbolo relazionale binario e sia X_L lo spazio polacco delle L-strutture aventi universo* $\mathbf{N}$. *Per ogni gruppo numerabile G sia $\mathcal{U}_G \subseteq X_L$ la classe dei grafi il cui gruppo d'automorfismi è isomorfo a G. Allora $\mathcal{U}_G$ è un insieme coanalitico completo. Se G, G' sono gruppi numerabili non isomorfi, allora $\mathcal{U}_G$, $\mathcal{U}_{G'}$ sono borelianamente inseparabili.*

Dunque la famiglia $\{\mathcal{U}_G\}_G$ costituisce una famiglia con la cardinalità del continuo di insiemi coanalitici completi, a coppie disgiunti, borelianamente inseparabili. Grazie alla corrispondenza tra sottoinsiemi boreliani di X_L invarianti per isomorfismo ed enunciati di $L_{\omega_1\omega}$, tale risultato ammette una interpretazione in teoria dei modelli.

TEOREM 2. – *Sia φ un enunciato di $L_{\omega_1\omega}$ soddisfatto da tutti i grafi numerabili il cui gruppo d'automorfismi è isomorfo a un fissato gruppo numerabile G. Allora, per ogni gruppo numerabile H, esiste un grafo numerabile soddisfacente φ e il cui gruppo d'automorfismi è isomorfo a H.*

In [1] è presentata una procedura generale che trasforma una dimostrazione di $\mathbf{\Pi}_1^1$-completezza in esempi di coppie di insiemi $\mathbf{\Pi}_1^1$-completi disgiunti borelianamente inseparabili, della forma

$$A = \{\text{punti senza singolarità}\}; \qquad B = \{\text{punti con una singolarità}\}.$$

Tale costruzione può essere generalizzata, dimostrando anzitutto il teorema seguente.

TEOREMA 3. – *Se F è un sottoinsieme chiuso non σ-compatto dello spazio di Baire $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$, sia UB_F l'insieme degli alberi su $\mathbf{N}$ aventi un unico ramo infinito x e tali che $x \in F$. Allora UB_F è un insieme coanalitico completo. Se F' è un chiuso non σ-compatto dello spazio di Baire, disgiunto da F, allora UB_F, $UB_{F'}$ sono borelianamente inseparabili.*

Poiché $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ ammette una partizione $\mathcal{F}$ in $2^{\aleph_0}$ chiusi omeomorfi a $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$, si ha che $\{UB_F\}_{F\in\mathcal{F}}$ è una famiglia di $2^{\aleph_0}$ insiemi coanalitici completi, a coppie disgiunti e borelianamente inseparabili. Tale risultato si può quindi applicare per ottenere numerosi esempi di famiglie di coanalitici inseparabili in analisi, topologia, ecc. Ogni elemento di una tale famiglia risulta della forma

$$A_F = \{\text{punti con una sola singolarità, localizzata in } F\}$$

dove F varia in una opportuna partizione di uno spazio polacco in $2^{\aleph_0}$ pezzi. Per esempio si ha il fatto seguente.

TEOREMA 4. – *Sia $\mathcal{F}$ una partizione di $[0,1]\setminus\mathbf{Q}$ in $2^{\aleph_0}$ sottospazi chiusi omeomorfi a $[0,1]\setminus\mathbf{Q}$. Per ogni $F\in\mathcal{F}$ sia*

$$\mathcal{C}_F = \{f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbf{R}) \mid \exists x \in F \ (x \text{ è l'unico punto di differenziabilità di } f)\}.$$

Allora $\{\mathcal{C}_F\}_{F\in\mathcal{F}}$ è una famiglia costituita da $2^{\aleph_0}$ insiemi coanalitici completi, a coppie disgiunti, borelianamente inseparabili.

Strumenti di teoria descrittiva degli insiemi si applicano per lo studio della complessità di varie nozioni d'equivalenza che ricorrono in matematica. Il concetto centrale in tale studio è la nozione di riducibilità boreliana. Date relazioni di equivalenza E, F su spazi *standard Borel* (insiemi dotati di una σ-algebra isomorfa alla σ-algebra dei boreliani di uno spazio polacco) X, Y rispettivamente, si dice che E è *borelianamente riducibile* a F, in simboli $E \leqslant_B F$, se esiste una funzione boreliana $f: X \to Y$ tale che

$$\forall x, y \in X \ (xEy \Leftrightarrow f(x)\, F f(y)).$$

Intuitivamente, la relazione di equivalenza E è più semplice di F, poichè ogni invariante completo per F fornisce un invariante completo anche per E, mediante la funzione f. Se $E \leqslant_B F$ e $F \leqslant_B E$, allora E ed F si dicono *borelianamente equivalenti* ($E \sim_B F$).

Sia L un linguaggio numerabile e sia T una teoria numerabile in $L_{\omega_1\omega}$. Allora l'insieme $\mathrm{Mod}(T)$ dei modelli numerabili di T è uno spazio standard Borel; la relazione d'isomorfismo su $\mathrm{Mod}(T)$ può essere vista come relazione d'equivalenza orbitale indotta da un'azione boreliana del gruppo S_∞ delle permutazioni su $\mathbf{N}$. Per risultati di [2], esiste una relazione d'equivalenza C_∞ indotta da un'azione boreliana di S_∞ che è completa nel senso che, se E è la relazione d'isomorfismo sui modelli numerabili di una teoria T in un linguaggio numerabile, si ha $E \leqslant_B C_\infty$. Una relazione d'equivalenza E si dice *borelianamente completa* o *S_∞-universale* se vale $C_\infty \sim_B E$. Una classe invariante $\mathcal{A}$ di modelli numerabili è *borelianamente completa* se la restrizione ad $\mathcal{A}$ della relazione d'isomorfismo è borelianamente completa. Risultati classici di teoria dei modelli asseriscono che grafi, gruppi, reticoli ecc. sono borelianamente completi. Si dimostra inoltre la completezza boreliana di alberi, ordini totali, campi di caratteristica fissata. A questo proposito, vale il risultato seguente.

TEORREMA 5. – *La classe delle algebre di Boole numerabili è borelianamente completa.*

In effetti si ha una versione più forte di questo risultato, che corrisponde alla verifica di una forma forte della congettura di Vaught per algebre di Boole.

TEOREMA 6. – *Sia T una teoria completa di algebre di Boole. Allora T ha un unico modello numerabile, a meno d'isomorfismo, oppure* $\mathrm{Mod}(T)$ *è borelianamente completo.*

La completezza delle algebre di Boole ha un corrispondente topologico.

TEOREMA 7. – *La relazione d'omeomorfismo tra spazi di Boole separabili è borelianamente completa.*

Come conseguenza si dimostra la completezza di varie altre relazioni d'equivalenza.

TEOREMA 8. – *Sono relazioni borelianamente complete:*
(a) *la relazione di traslazione tra chiusi dello spazio di Cantor;*
(b) *la relazione di coniugio tra omeomorfismi dello spazio di Cantor;*
(c) *la relazione d'isomorfismo tra algebre AF commutative;*
(d) *la relazione di equivalenza tra diagrammi di Bratteli;*
(e) *la relazione d'isomorfismo tra gruppi dimensionali.*

Una relazione d'equivalenza su uno spazio standard Borel si dice *numerabile* se ha classi d'equivalenza numerabili. Una relazione d'equivalenza E boreliana numerabile è *universale* se, per ogni relazione d'equivalenza boreliana numerabile F si ha $F \leqslant_B E$. In [3] si dimostra l'esistenza di relazioni d'equivalenza boreliane numerabili universali. A questo riguardo si hanno i seguenti rafforzamenti di risultati di [5], [4].

TEOREMA 9. – *Sia G un gruppo di permutazioni su* $\mathbf{N}$ *contenente le biiezioni ricorsive. La relazione d'equivalenza orbitale indotta da G su* $5^{\mathbf{N}}$ *per traslazione è una relazione d'equivalenza boreliana numerabile universale.*

TEOREMA 10. – *Sia G un gruppo numerabile contenente un sottogruppo isomorfo al gruppo libero su due elementi F_2. La relazione di coniugio tra i sottogruppi di G è una relazione d'equivalenza boreliana numerabile universale.*

Appare poi interessante investigare quali classi di strutture numerabili siano tali che la relazione d'isomorfismo ricorsivo risulti universale per relazioni d'equivalenza boreliane numerabili.

TEOREMA 11. – *Risultano universali tra le relazioni d'equivalenza boreliane numerabili le relazioni d'isomorfismo ricorsivo per le seguenti classi di strutture numerabili:*
(a) *alberi (con o senza radice);*
(b) *ordini totali;*
(c) *gruppi.*

BIBLIOGRAFIA

[1] H. BECKER, *Some examples of Borel-inseparable pairs of coanalytic sets*, Mathematika, **33** (1986), 72-79.
[2] H. BECKER e A.S. KECHRIS, *The descriptive set theory of Polish group actions*, Cambridge University Press, 1996.
[3] R. DOUGHERTY, S. JACKSON e A.S. KECHRIS, *The structure of hyperfinite equivalence relations*, Transactions of the American Mathematical Society, **341** (1994), 193-225.
[4] R. DOUGHERTY e A.S. KECHRIS, *How many Turing degrees are there?*, Proceedings of the AMS Summer Research Conference on Computability Theory and Applications, Boulder, Colorado, 1999.
[5] S. THOMAS e B. VELIČKOVIĆ, *On the complexity of the isomorphism relation for finitely generated groups*, Journal of Algebra, **217** (1999), 352-373.

Institut für Formale Logik, Universität Wien, Wien, Austria
e-mail: camerlo@logic.univie.at.ac
Dottorato di ricerca in Matematica (sede amministrativa: Genova) - Ciclo XI
Direttore di ricerca: Prof. Alexander S. Kechris, California Institute of Technology