Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Paola Cavaliere

Spazi di tipo Morrey ed applicazioni alle equazioni ellittiche

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.3, p. 295–298.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_3_295_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie 8, Vol. III-A, Dicembre 2000, 295-298

Spazi di tipo Morrey ed applicazioni alle equazioni ellittiche.

Paola Cavaliere

1 – Premesse.

L'elaborato si inserisce nel quadro della teoria delle equazioni differenziali lineari ellittiche del secondo ordine in forma di non divergenza a coefficienti discontinui in domini non limitati di $\mathbb{R}^n$ e del problema di Dirichlet ad esse associato.

L'intento è quello di verificare se possano essere individuate delle condizioni opportune -in termini di discontinuità- da imporsi sui coefficienti di un operatore differenziale lineare ellittico del secondo ordine

$$(*)\qquad L := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + a(x) \quad \text{q.o.} \quad x \in \Omega\,,$$

con Ω aperto non limitato $C^{1,1}$-uniformemente regolare di $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, tali da assicurare che per ogni $p \in]1, +\infty[$ una soluzione $u \in W^{2,p}_{loc}(\overline{\Omega}) \cap \overset{\circ}{W}{}^{1,p}_{loc}(\overline{\Omega}) \cap L^{p_o}(\Omega)$ di $Lu = f$, $f \in L^q(\Omega)$, con $q \geq p$ e $p_o \in [1, q]$, sia in $W^{2,q}(\Omega)$ e verifichi la stima

$$(\heartsuit)\qquad \|u\|_{W^{2,q}(\Omega)} \leq c(\,|Lu|_{q,\Omega} + |u|_{p_o,\Omega}).$$

Per domini Ω_o limitati ed operatori L ridotti alla sola parte principale, è stato provato (cfr. [4, 5]) – estendendo un risultato miliare di C. Miranda – che il precedente interrogativo ha risposta positiva nell'ipotesi che i coefficienti a_{ij} siano limitati quasi ovunque in $\mathbb{R}^n$ ed inoltre appartengano allo spazio di Sarason delle funzioni ad oscillazione media limitata tendente a zero al tendere a zero dell'ampiezza dei raggi delle sfere sulle quali l'oscillazione è calcolata, i.e. $VMO(\mathbb{R}^n)$. L'ipotesi VMO – è bene porlo in evidenza – garantisce, se non una continuità di tipo puntuale, almeno una continuità integrale, che risulta cruciale per il buon esito delle tecniche di analisi reale utilizzate. La veridicità del risultato permane inoltre, ferma restando l'ipotesi sui coefficienti a_{ij}, anche per operatori L dotati di termini di ordine inferiore verificanti opportune condizioni di sommabilità (cfr. [8]).

D'altro canto, è stato dimostrato (cfr. [1], [7]) che è possibile fornire una definizione di spazio di funzioni ad oscillazione media limitata su un sottoinsieme aperto Ω arbitrario di $\mathbb{R}^n$ – e di qui di $VMO(\Omega)$ – compatibile con quella classica, che si riduce ad essa per $\Omega \equiv \mathbb{R}^n$ o Ω limitato.

Ciò non ha valenza meramente teorica, rivelandosi anzi di interesse applicativo notevole; infatti, una volta ipotizzato che

$$
(1) \qquad \begin{cases} a_{ij} = a_{ji} \in L^{\infty}(\Omega) \cap VMO(\Omega), \quad i, j = 1, \ldots, n, \\ \exists \Lambda > 0 : \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, \xi_i \xi_j \geqslant \Lambda |\xi|^2 \quad \text{q.o. } x \in \Omega, \ \forall \xi \in R^n, \end{cases}
$$

si è abilitati a far uso dei risultati di F. Chiarenza, M. Frasca e P. Longo ([4, 5]) ogni qual volta si localizzi adeguatamente l'indagine.

Assumendo (1), rimangono, allora, da determinare le "condizioni opportune" da imporsi sui coefficienti dei termini di ordine inferiore dell'operatore L che consentano di ottenere la stima desiderata. Ciò si traduce nella necessità di analizzare l'operatore di moltiplicazione definito nello spazio di Sobolev $W^{k,q}(\Omega)$, per $k =$ 1 e 2, al fine di individuare quale sia lo spazio ambiente opportuno di appartenenza del fattore moltiplicativo g (che evidentemente dipenderà, oltre che da q, anche da k) che assicuri che il suddetto operatore, π_g, assuma valori in $L^q(\Omega)$ e sia limitato.

Stimolata dalla generalizzazione di un risultato di immersione di C. Fefferman dovuta a F. Chiarenza e M. Frasca (cfr. [3]), l'analisi si orienta verso una disamina approfondita degli spazi di tipo Morrey $M^{r,\lambda}(\Omega)$, introdotti in [6] (coincidenti esattamente con gli spazi di Morrey $L^{r,\lambda}(\Omega)$ se Ω è limitato – il che dà ragione della loro denominazione - e più ampi degli $L^{r,\lambda}$ se $\Omega = \mathbb{R}^n$), e dell'operatore di moltiplicazione π_g, con fattore moltiplicativo g scelto appunto in siffatti spazi.

Ciò si rivela fruttuoso, consentendo in particolare di stabilire il voluto risultato di regolarizzazione.

Il tecnicismo dei risultati relativi all'operatore di moltiplicazione osta al loro richiamo in questa sede, ove ci si limita, una volta fornita la definizione degli spazi di tipo Morrey, ad esporre il citato risultato di regolarizzazione (Lemma 3.1) e, successivamente, un risultato di unicità (cfr. [2]) per il problema di Dirichlet

$$
(\mathcal{D}_0) \qquad u \in W^{2,p}_{loc}(\overline{\Omega}) \cap \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega), \qquad Lu = 0\,,
$$

con L definito in $(*)$, di cui il lemma è uno strumento dimostrativo essenziale.

2. – Spazi di tipo Morrey $M^{r,\lambda}(\Omega)$.

Nella presente sezione si conviene che Ω sia un arbitrario sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$.

DEFINIZIONE 2.1. – *Assegnati* $r \in [1, +\infty[$ *e* $\lambda \geqslant 0$, *si dice che una funzione* g, *definita in* Ω, *appartiene all'*insieme di tipo Morrey $M^{r,\lambda}(\Omega)$ *se* $g \in L^r_{loc}(\overline{\Omega})$ *e se*

$$
\|g\|_{M^{r,\lambda}(\Omega)} \ := \ \sup_{\substack{x \in \Omega \\ \varrho \in]0,1]}} \varrho^{-\lambda/r} |g|_{r,\,\Omega(x,\varrho)} < +\infty\,.
$$

Si riscontra

PROPOSIZIONE 1. – *Se* $r \in [1, +\infty[$ *e* $\lambda \geq 0$, *allora*

(*i*) $(M^{r,\lambda}(\Omega), \|\cdot\|_{M^{r,\lambda}(\Omega)})$ *è uno spazio di Banach,*

(*ii*) $\lambda > n \Rightarrow M^{r,\lambda}(\Omega) = \{0\}$,

(*iii*) $M^{r,n}(\Omega) \leftrightarrows L^\infty(\Omega)$,

(*iv*) *se* $r \leq s$ *e* $\dfrac{\lambda - n}{r} \leq \dfrac{\nu - n}{s}$, *allora* $M^{s,\nu}(\Omega) \hookrightarrow M^{r,\lambda}(\Omega)$.

Inoltre, $L^\infty(\Omega)$ è un sottospazio vettoriale di $M^{r,\lambda}(\Omega)$, ivi non chiuso.

3. – Risultati principali.

Se Ω è un aperto non limitato $C^{1,1}$-uniformemente regolare di $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, e L è l'operatore definito in $(*)$ si prova

LEMMA 1. – *Nell'ipotesi* (1), *se*

(2) $$a_i \in \overline{L^\infty(\Omega)}^{M^{r_1,\lambda_1}(\Omega)}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad \text{e} \quad a \in \overline{L^\infty(\Omega)}^{M^{r_2,\lambda_2}(\Omega)},$$

e $p, q \in]1, +\infty[$, *con*

$(\mathcal{A})$ $$r_k \geq q > p, \qquad \lambda_k \in [0, n[\cap]n - kr_k, +\infty[, \qquad k = 1, 2,$$

allora una soluzione "u" del problema

$$\begin{cases} u \in W^{2,p}_{loc}(\overline{\Omega}) \cap \overset{\circ}{W}{}^{1,p}_{loc}(\overline{\Omega}) \cap L^{p_o}(\Omega) \\ Lu \in L^q(\Omega), \end{cases}$$

con $p_o \in [1, q]$, *appartiene a* $W^{2,q}(\Omega)$ *ed inoltre verifica la stima* (♡).

La dimostrazione del precedente risultato si fonda sulla sinergia di adeguate localizzazioni dell'indagine con gli esiti della ricerca svolta sull'operatore di moltiplicazione con fattore moltiplicativo in spazi di tipo Morrey; tale ricerca rivela da un lato la necessità dell'ipotesi (2) per ottenere la compattezza del suddetto operatore, dall'altro l'esistenza di un parametro t che – parlando in termini atecnici – consente di colmare, in un numero ben determinato di volte, il "*gap*" tra p e q, in modo tale da consentire un processo di iterazione nel quale ad ogni passo venga preservata la limitatezza dell'operatore L.

Il Lemma 3.1, unitamente al seguente, consentono di provare il teorema di unicità preannunciato.

LEMMA 3.2. – *Nell'ipotesi* (1), *se*

(3) $$a_i \in L^r_{loc}(\overline{\Omega}) \quad \text{con } r > n \text{ se } p \leq n, \quad r = p \text{ se } p > n, \ i = 1, \ldots, n,$$

(4) $$\begin{cases} a \in L^s_{loc}(\overline{\Omega}) \ \text{con } s > \dfrac{n}{2} \ \text{se } p \leq \dfrac{n}{2}, \quad s = p \ \text{se } p > \dfrac{n}{2}, \\ a \leq 0 \ \text{q.o. in } \Omega, \end{cases}$$

una soluzione del problema di Dirichlet

$$(\mathcal{D}) \qquad \begin{cases} Lu = 0 \quad q.o. \ in \ \Omega \\ u \in W^{2,p}_{loc}(\overline{\Omega}) \cap \overset{\circ}{W}{}^{1,p}_{loc}(\overline{\Omega}) \\ \lim\limits_{|x| \to +\infty} u(x) = 0 \end{cases}$$

è nulla in Ω.

Il punto focale della dimostrazione del lemma testé enunciato risiede nell'evidenziare che, "per ogni $p > 1$, una soluzione u di $Lu = 0$ q.o. in Ω, $u \in W^{2,p}_{loc}(\overline{\Omega}) \cap \overset{\circ}{W}{}^{1,p}_{loc}(\overline{\Omega})$, è in $C(\overline{\Omega})$". Ciò è conseguenza di noti risultati di immersione per spazi di Sobolev per $p > \frac{n}{2}$, ovvero, per $p \leq \frac{n}{2}$, di un risultato di regolarizzazione locale in spazi di tipo Morrey, il quale – va sottolineato – estende un risultato di regolarizzazione su domini limitati presente in [8], consentendo di preservare l'asserto pur ampliando la famiglia degli spazi funzionali ambiente dei coefficienti di ordine inferiore dell'operatore L.

TEOREMA 1. – *Nelle ipotesi* (1), (3) *e* (4), *con* $a_i \in \overline{L^\infty(\Omega)}^{M^{r,0}(\Omega)}$, $i = 1, \ldots, n$, *e* $a \in \overline{L^\infty(\Omega)}^{M^{s,0}(\Omega)}$ *quando $p \leq n$, una soluzione del problema di Dirichlet* ($\mathcal{D}_0$) *è nulla in Ω.*

BIBLIOGRAFIA

[1] CAVALIERE P., MANZO G. e VITOLO A., *Spaces of Morrey type and BMO spaces in unbounded domains of* $\mathbb{R}^n$, Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat., **20** (1996), 123-140.

[2] CAVALIERE P., TRANSIRICO M. e TROISI M., *Uniqueness result for elliptic equations in unbounded domains*, Le Matematiche (Catania), **54** (1999), 139-146.

[3] CHIARENZA F. e FRASCA M., *A remark on a paper by C. Fefferman*, Proc. Amer. Math. Soc., **108** (1990), 407-409.

[4] CHIARENZA F., FRASCA M. e LONGO P., *Interior $W^{2,p}$-estimates for non divergence elliptic equations with discontinuous coefficients*, Ricerche Mat., **40** (1991), 149-168.

[5] CHIARENZA F., FRASCA M. e LONGO P., *$W^{2,p}$-solvability of the Dirichlet problem for non divergence elliptic equations with VMO coefficients*, Trans. Amer. Math. Soc., **336** (1993), 841-853.

[6] TRANSIRICO M., TROISI M. e VITOLO A., *Spaces of Morrey type and elliptic equations in divergence form on unbounded domains*, Boll. Un. Mat. Ital., **9-B** (1995), 153-174.

[7] TRANSIRICO M., TROISI M. and VITOLO A., *BMO spaces on domains of* $\mathbb{R}^n$, Ricerche Mat., **45** (1996), 355-378.

[8] VITANZA C., *A new contribution to the $W^{2,p}$ regularity for a class of elliptic second order equations with discontinuous coefficients*, Le Matematiche (Catania), **48** (1993), 287-296.

Via Sichelgaita 76/A, 84125 Salerno
e-mail: paolac@bridge.diima.unisa.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Napoli) - Ciclo XI
Direttore di ricerca: Prof.ssa Maria Transirico