BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

*Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura*

RITA CAVAZZONI

# Metodi cinetici nello studio qualitativo di problemi di evoluzione nonlineari con convezione e diffusione

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8*, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.3, p. 299–302.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_3_299_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie 8, Vol. III-A, Dicembre 2000, 299-302

# Metodi cinetici nello studio qualitativo di problemi di evoluzione nonlineari con convezione e diffusione.

RITA CAVAZZONI

Nel presente lavoro abbiamo sperimentato l'uso di tecniche cinetiche nello studio del comportamento asintotico in tempo di una classe di equazioni con convezione e diffusione e nell'analisi di modelli di perturbazione singolare per equazioni paraboliche nonlineari in più dimensioni. Prima di esporre in dettaglio i problemi affrontati, indichiamo le ragioni principali che hanno indotto all'uso di tecniche cinetiche.

Uno degli aspetti fondamentali nello studio dell'equazione di Boltzmann è l'analisi delle proprietà di scaling. Studiando il limite idrodinamico per l'equazione di evoluzione di Boltzmann, si dimostra che da uno scaling spazio-temporale si deriva il limite asintotico dell'equazione, quando il cammino libero medio tende a zero. Il risultato principale è il passaggio dalla descrizione mesoscopica della teoria cinetica a quella macroscopica della teoria del continuo. Questo passaggio è descritto usualmente dalle relazioni asintotiche tra le soluzioni dell'equazione di Boltzmann e le soluzioni delle equazioni di Eulero e di Navier-Stokes.

Inoltre, la deduzione di equazioni di diffusione come limite idrodinamico di modelli di particelle è un problema largamente studiato.

Recentemente, metodi di approssimazione basati sui cosiddetti schemi di approssimazione cinetica, che rappresentano la struttura microscopica, sono stati usati per provare risultati di esistenza per sistemi di leggi di conservazione. In generale, ci sono più soluzioni deboli al problema ai valori iniziali e si devono richiedere condizioni supplementari, per selezionare un'unica soluzione debole con buone proprietà matematiche (soluzioni entropiche).

Nella prima parte della tesi, abbiamo mostrato come il comportamento asintotico in tempo della soluzione al problema di Cauchy per una classe di equazioni con convezione e diffusione può essere derivato attraverso lo studio di un opportuno funzionale convesso nonnegativo, naturalmente correlato all'equazione.

La seconda parte tratta lo studio del limite di rilassamento di sistemi iperbolici semilineari verso leggi di conservazione diffusive.

Da un punto di vista fisico, l'approssimazione proposta corrisponde a uno scaling parabolico delle variabili $(x, t)$ in $\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$, nelle equazioni cinetiche.

Descriviamo ora in dettaglio i problemi studiati.

## 1 – Comportamento asintotico di una classe di equazioni con convezione e diffusione.

Abbiamo studiato un problema di Cauchy per la seguente classe di equazioni con convezione e diffusione:

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u^{p-1}\dfrac{\partial u}{\partial x} & x \in \mathbf{R}, \qquad t > 0\,; \\ u(x,\,0) = u_0(x) & x \in \mathbf{R}; \end{cases}$$

con $p \geqslant 2$. Il comportamento asintotico dell'equazione (1) per dati iniziali in $L^1$ è stato determinato in [3] da Escobedo e Zuazua. Adottando un approccio completamente differente, ovvero il metodo dell'entropia sviluppato in [2] per l'equazione dei mezzi porosi, abbiamo studiato il comportamento asintotico della soluzione di (1) per dati iniziali nonnegativi e in $L^1(\mathbf{R})$.

Effettuando uno scaling dipendente dal tempo, ricaviamo un'equazione di tipo Fokker-Planck nonlineare, correlata all'equazione precedente

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{\partial v}{\partial x} + xv - e^{(2-p)t}\dfrac{1}{p}v^p\right] & x \in \mathbf{R},\ t > 0, \\ v(x,\,0) = v_0(x) \qquad x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

La soluzione $v$ al problema (2) appartiene allo spazio

$$C((0,\,\infty);\, W^{2,\,q}(\mathbf{R})) \cap C^1((0,\,\infty);\, L^q(\mathbf{R}))$$

con $q \in (1,\,\infty)$. Per ogni $t_0 > 0$, valgono le seguenti stime sulla soluzione $v$

$$(3)\qquad \begin{cases} \|v(t)\|_{W^{1,\,q}} \leqslant C(q,\,t_0) \qquad \forall t > t_0,\ \forall q \in [1,\,\infty], \\ \|v(t)\|_\infty \leqslant C_\infty \qquad \forall t > 0. \end{cases}$$

Inoltre, notiamo che la massa si conserva.

Nel caso $p = 2$, il comportamento asintotico dell'equazione è determinato da una opportuna soluzione stazionaria di (2), che indichiamo con $v_\infty$. Nel caso $p > 2$, invece, il comportamento asintotico dell'equazione (1) dipende da una soluzione stazionaria dell'equazione di Fokker-Planck, vale a dire dell'equazione (2) senza termine nonlineare.

Abbiamo definito il seguente funzionale convesso nonnegativo per la soluzione $v$ del problema (2)

$$(4)\qquad L\left(\frac{v}{v_\infty}\right) = \int_{\mathbf{R}}\left(\frac{v(x,\,t)}{v_\infty(x)} - 1 - \log\frac{v(x,\,t)}{v_\infty(x)}\right) e^{-x^2/2}\,dx\,.$$

Nel caso $p = 2$, il funzionale $L$ è monotono noncrescente rispetto al tempo. Dall'espressione della derivata di $L$ rispetto a $t$, è possibile dimostrare che esiste una successione $v(\cdot,\,t_k)$, con $t_k \to +\infty$, tale che $v(x,\,t_k) \to v_\infty(x)$, q.o. $x \in \mathbf{R}$ per $t_k \to +\infty$. Nel caso $p > 2$, non si può dire che $L$ sia monotono noncrescente rispetto a $t$ lungo la soluzione $v$. Nonostante ciò, sia per $p = 2$ sia per $p > 2$, proviamo che $L$ converge a zero per $t \to +\infty$. Dopo aver dimostrato che vale la disuguaglianza seguente

$$\|v - v_\infty\|_{L^1(\mathbf{R})} \leqslant BL\left(\frac{v}{v_\infty}\right); \tag{5}$$

dove $B$ è un'opportuna costante, possiamo concludere con il seguente risultato sul comportamento asintotico in tempo per la soluzione del problema (1):

$$\forall q \in [1, \infty), \qquad \lim_{t \to +\infty} (2t+1)^{1/2(1-1/q)} \|u(x, t) - u_\infty(x, t)\|_{L^q(\mathbf{R})} = 0, \tag{6}$$

dove $u_\infty(x, t) = \frac{1}{(2t+1)^{1/2}} v_\infty\left(\frac{x}{(2t+1)^{1/2}}\right)$ e $v_\infty$ è la soluzione stazionaria determinata come sopra specificato.

## 2. – Modelli di perturbazione singolare per equazioni paraboliche nonlineari.

Abbiamo studiato, dapprima nel caso particolare dell'equazione di Fisher della genetica

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \varrho}{\partial x^2} + \varrho(1-\varrho); \tag{7}$$

un modello di perturbazione singolare per la precedente equazione (7) dato dal sistema iperbolico semilineare

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{\varepsilon^2}(v-u) + v(1-2u) \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - \dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{1}{\varepsilon^2}(u-v) + u(1-2v); \end{cases} \tag{8}$$

dove $\varepsilon$ è un parametro positivo.

Il problema di rilassamento per il sistema (8) è stato studiato con tecniche simili a quelle usate in [4], anche se l'analisi di (8) presenta alcune notevoli differenze. Infatti, a causa del termine di sorgente, in questo caso non valgono la conservazione della massa e principi di entropia, che sono alla base dello studio condotto in [4].

Successivamente, in un contesto teorico generale, abbiamo studiato un sistema di rilassamento per la seguente classe di equazioni paraboliche degeneri:

$$\partial_t u + \sum_{j=1}^{d} \partial_{x_j}[A_j(u)] = \Delta_x[B(u)] + g(u), \qquad (x, t) \in \mathbf{R}^d \times (0, \infty), \tag{9}$$

con condizione iniziale

$$u(x, 0) = u_0(x), \qquad x \in \mathbf{R}^d. \tag{10}$$

Poniamo le seguenti ipotesi per l'equazione precedente:

a) le funzioni $A_j$, $B$ sono lipschitziane,

b) $B' \geqslant 0$,

c) la funzione $g$ è localmente lipschitziana e $g(0) = 0$.

Seguendo l'idea introdotta da Natalini in [1] e in [5], abbiamo proposto un modello di perturbazione singolare per la classe di equazioni (9) costituito da sistemi semilineari di leggi di conservazione.

Sia $N \geqslant 1$ fissato e per $i = 1, \ldots, N$, $\varepsilon > 0$, sia $f_i^\varepsilon$ la soluzione al seguente problema di Cauchy

$$\partial_t f_i^\varepsilon + \sum_{j=1}^{d} \gamma_{ij}^\varepsilon \partial_{x_j} f_i^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}(M_i(\varepsilon, u^\varepsilon) - f_i^\varepsilon) + \alpha_i g(u^\varepsilon), \tag{11}$$

con valore iniziale

$$f_i^\varepsilon(x, 0) = f_{0i}^\varepsilon(x), \qquad i = 1, \ldots, N, \tag{12}$$

dove

$$u^\varepsilon(x, t) = \sum_{i=1}^{N} f_i^\varepsilon(x, t) \;\text{ e }\; g_{ij}^\varepsilon := \lambda_{ij} + \frac{\theta_{ij}}{\sqrt{\varepsilon}}. \tag{9}$$

Precisiamo che $\lambda_{ij}, \theta_{ij} \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^d$ sono costanti fissate; $\alpha_i \in \mathbf{R}$ sono tali che $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1$ e $M : [0, 1] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^N$ è una funzione lipschitziana e monotona nondecrescente nella seconda variabile.

Abbiamo provato che la successione $u^\varepsilon$ tende a una funzione limite $u$ in un opportuno spazio funzionale, per $\varepsilon \to 0$ e che $u$ è una soluzione debole del problema (9). Inoltre, si dimostra che $u$ è l'unica soluzione entropica al problema (9)-(10), cioè $u$ soddisfa le condizioni affinchè il problema di Cauchy per l'equazione parabolica degenere (9) sia ben posto.

## BIBLIOGRAFIA


[1] F. Bouchut e F.R. Guarguaglini e R. Natalini, *Diffusive BGK approximations for nonlinear multidimensional parabolic equations*, to appear in Indiana Univ. Math. J. (2000).

[2] J.A. Carrillo e G. Toscani, *Asymptotic $L^1$ decay of solutions of the porous medium equation to self similarity*, to appear in Indiana Univ. Math. J. (2000).

[3] M. Escobedo e E. Zuazua, *Large time behaviour for convection-diffusion equations in* $\mathbf{R}^N$, J. Funct. Anal., **100** (1991), 119-161.

[4] P.L. Lions e G. Toscani, *Diffusive limit for finite velocity Boltzmann kinetic models*, Rev. Mat. Iberoamericana, **13** (1997), 473-513.

[5] R. Natalini, *A discrete kinetic approximation of entropy solutions to multidimensional scalar conservation laws*, J. Diff. Equations, **148** (1998), 292-317.



Dipartimento di Matematica, Università di Firenze
e-mail: cavazzon@prmat.math.unipr.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Firenze) - Ciclo XI
Direttore di ricerca: Prof. R. Natalini, IAC-CNR (Roma);
Prof. G. Toscani, Università di Pavia