Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Francesca Ceragioli

Equazioni differenziali ordinarie discontinue e stabilizzazione

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.3, p. 307–310.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_3_307_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie 8, Vol. III-A, Dicembre 2000, 307-310

Equazioni differenziali ordinarie discontinue e stabilizzazione.

FRANCESCA CERAGIOLI

1 – Introduzione.

La tesi si situa nell'ambito della teoria matematica del controllo. Oggetto di studio sono sistemi di equazioni differenziali non lineari ordinarie della forma

$$\dot{x} = f(x, u), \tag{1}$$

dove $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ è un parametro, detto *controllo*, $f : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n$ è continua e tale che $f(0, 0) = 0$, per cui l'origine è un punto di equilibrio per il sistema (1).

Siamo interessati in particolare allo studio della proprietà di stabilizzabilità del sistema (1), di cui diamo la definizione.

DEFINIZIONE 1. – *Il sistema* (1) *si dice* stabilizzabile *se esiste una funzione* $k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, *detta* feedback, *che rende l'origine del sistema retroazionato*

$$\dot{x} = f(x, k(x)) \tag{2}$$

asintoticamente stabile, cioè stabile nel senso di Lyapunov e attrattiva per tutte le soluzioni del sistema (2).

Un problema fondamentale nella stabilizzazione dei sistemi non lineari è la regolarità del feedback: la condizione di Brockett ([1]) ha infatti messo in evidenza che è restrittivo limitarsi a considerare feedback continui. Per stabilizzare sistemi che non ammettono feedback stabilizzanti continui si può fare ricorso a feedback dipendenti dal tempo o a feedback discontinui. Nella tesi abbiamo considerato esclusivamente feedback discontinui. L'introduzione di questi feedback pone il problema di dare senso all'equazione (2) quando k è discontinua. Prima di affrontare il problema della stabilizzazione si tratta quindi di stabilire in che senso le soluzioni di equazioni differenziali aventi secondo membro discontinuo debbano essere eventualmente considerate.

2. – Equazioni differenziali discontinue.

Per studiare le soluzioni di equazioni differenziali con secondo membro discontinuo si possono essenzialmente seguire due strade. La prima consiste nel considerare soluzioni di Carathéodory e nel cercare le ipotesi meno restrittive sul secondo membro dell'equazione affinché tali soluzioni esistano. In alternativa si possono definire diversi tipi di soluzioni generalizzate. Le soluzioni generalizzate più comunemente usate nell'ambito della teoria del controllo sono quelle di Eulero, di sampling, di Krasovskii e di Filippov.

Le soluzioni di Eulero e sampling generalizzate sono definite come limiti uniformi di successioni i cui elementi sono le soluzioni di sistemi approssimanti il sistema dato. Per le soluzioni di Eulero tali successioni sono costituite da poligonali. Le soluzioni di sampling generalizzate sono invece limiti di soluzioni di sistemi in cui il controllo è costante a tratti.

Le soluzioni di Filippov e di Krasovskii sono definite associando all'equazione data una inclusione differenziale, le cui soluzioni sono, per definizione, le soluzioni dell'equazione di partenza.

Le relazioni fra questi tipi di soluzioni sono piuttosto deboli. In estrema sintesi si può dire che l'insieme di soluzioni più ampio è quello delle soluzioni di Krasovskii. Nella tesi consideriamo principalmente soluzioni di Filippov, di cui diamo la definizione.

DEFINIZIONE 2. – *Una funzione assolutamente continua* $\varphi : [t_0, t_0 + a] \to \mathbb{R}^n$ *è una* soluzione di Filippov *dell'equazione* $\dot{x} = f(x)$ *sull'intervallo* $[t_0, t_0 + a]$ *se è una soluzione dell'inclusione differenziale*

$$\dot{x} \in Ff(x) = \bigcap_{\delta > 0} \bigcap_{\mu(N) = 0} \overline{\text{co}}\, f(B(x, \delta) \setminus N), \tag{3}$$

dove μ *indica la misura di Lebesgue in* $\mathbb{R}^n$ *e* $\overline{\text{co}}$ *la chiusura convessa.* $\varphi(\cdot)$ *è cioè soluzione se verifica* (3) *per quasi ogni* $t \in [t_0, t_0 + a]$.

3. – Un problema di stabilizzazione.

Consideriamo un sistema non lineare affine nel controllo, cioè della forma

$$\dot{x} = f(x) + G(x)\, u = f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x)\, u_i, \tag{4}$$

dove le funzioni $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $g_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $i = 1, \ldots, m$ sono continue e G è la matrice le cui colonne sono le g_i. Associamo a (4) il sistema non forzato

$$\dot{x} = f(x). \tag{5}$$

Supponiamo che questo sistema abbia nell'origine un punto di equilibrio (cioè $f(0) = 0$) stabile nel senso di Lyapunov. Vogliamo rendere questo sistema asintoticamente stabile per mezzo di un controllo, cioè vogliamo stabilizzare asintoticamente il sistema affine. In [2], Jurdjevic e Quinn dimostrano che, se

a) il sistema non forzato (5) è stabile ed è nota per esso una funzione di Lyapunov V di classe C^1,

b) sono soddisfatte alcune condizioni geometriche che coinvolgono i campi vettoriali f, g_1, $\ldots$, g_m, allora il sistema affine (4) può essere stabilizzato per mezzo di un feedback della forma

$$k(x) = -\alpha(\nabla V(x)\, G(x))^T, \qquad \alpha \in \mathbb{R}^+. \tag{6}$$

Ricordiamo la definizione di funzione di Lyapunov.

DEFINIZIONE 3. – *Una funzione* $V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *continua in* 0 *è una* funzione di Lyapunov *per* (5) *se è decrescente lungo tutte le soluzioni di tale equazione, cioè per ogni soluzione* $\varphi(t)$ *di* (5) *su* $I \subset \mathbb{R}$ *si ha* $V(\varphi(t_2)) \leq V(\varphi(t_1))$ *per tutti i* t_1, $t_2 \in I$ *tali che* $t_1 \leq t_2$.

In generale l'esistenza di una funzione di Lyapunov garantisce la stabilità nel senso di Lyapunov del sistema.

Un punto debole del risultato di Jurdjevic e Quinn citato è l'ipotesi che la funzione di Lyapunov V sia di classe C^1. Infatti, se il sistema non forzato è stabile nel senso di Lyapunov, allora è soltanto garantita l'esistenza di una funzione di Lyapunov semicontinua. Volendo indebolire l'ipotesi sulla regolarità di V, supponiamo che sia localmente lipschitziana. In questo caso il feedback (6) non è più continuo, ma è definito quasi ovunque e localmente essenzialmente limitato. Il secondo membro del sistema (4) è dunque discontinuo e le sue soluzioni devono essere intese in un qualche senso generalizzato. Le soluzioni che più naturalmente si adattano a questa situazione sono quelle di Filippov.

Indichiamo con $\partial_C V(x)$ il gradiente di Clarke di V calcolato in x. Ricordiamo che, se V è localmente lipschitziana, detto N il sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ in cui V non è differenziabile, vale la seguente caratterizzazione di $\partial_C V(x)$:

$$\partial_C V(x) = \mathrm{co}\left\{\lim_i \nabla V(x_i),\ x_i \to x,\ x_i \notin N\right\}.$$

Il seguente risultato di stabilizzazione è una versione semplificata di uno dei risultati contenuti nella tesi.

TEOREMA 1. – *Sia* V *una funzione di Lyapunov localmente lipschitziana per* (5). *Se per ogni* $x \in \mathbb{R}^n$ *si ha* $(pG(x)) \cdot (qG(x)) < 0$ *per ogni* p, $q \in \partial_C V(x)$, *allora il feedback* (6) *stabilizza asintoticamente il sistema* (4).

Nella tesi si fa l'ipotesi, più restrittiva, che la funzione V, oltre che localmente lipschitziana, sia anche sana, nel senso introdotto da Valadier in [5]. La classe delle funzioni sane è una classe piuttosto ampia, che comprende le funzioni convesse e le funzioni regolari secondo Clarke. Il fatto di considerare funzioni di Lyapunov sane permette di studiare sistemi affini più generali, in cui la funzione f nel sistema (4) non è continua, ma è solo localmente essenzialmente limitata. Per questi sistemi, per avere ancora un risultato di stabilizzabilità, è però necessario fare delle ulteriori ipotesi che riguardano la posizione del gradiente di Clarke di V rispetto al campo vettoriale f.

Per dimostrare il Teorema 1 si ripercorre essenzialmente lo schema seguito da Jurdjevic e Quinn in [2]. In un primo tempo si dimostra che l'applicazione del feedback lascia invariate le proprietà di stabilità del sistema non forzato. Poi, per mezzo del principio di LaSalle, si dimostra che l'insieme cui tendono le soluzioni del sistema retroazionato si riduce all'origine.

Gli strumenti essenziali che abbiamo costruito per poter seguire questo schema sono una condizione sufficiente di stabilità ed una versione del principio di LaSalle valide per inclusioni differenziali e funzioni di Lyapunov localmente lipschitziane (e sane). Tali risultati hanno un interesse indipendente dalla loro applicazione al problema di stabilizzazione. Segnaliamo infine che le tecniche usate per dimostrare questi risultati intermedi si ispirano in particolare agli articoli di Shevitz e Paden [4] e di Paden e Sastry [3].

BIBLIOGRAFIA

[1] BROCKETT R.W., *Asymptotic stability and feedback stabilization*, Differential Geometric Control Theory, R.W. Brockett, R.S. Millmann and J.H. Sussmann Eds., Birkhauser, Boston (1983), 181-191.

[2] JURDJEVIC V. e QUINN J.P., *Controllability and Stability*, Journal of Differential Equations (1978), 381-389.

[3] PADEN B. e SASTRY S., *A Calculus for Computing Filippov's Differential Inclusion with Application to the Variable Structure Control of Robot Manipulators*, IEEE Transaction on Circuits and Systems, Vol. Cas-34, No. 1 (1997), 73-81.

[4] SHEVITZ D. e PADEN B., *Lyapunov Stability Theory of Nonsmooth Systems*, IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. **39**, No. 9 (1994), 1910-1914.

[5] VALADIER M., *Lignes de descente de fonctions lipschitziennes non pathologiques*, Sem. d'Anal. Convex, Montpellier (1988), N. 9.

Dipartimento di Matematica del Politecnico di Torino
e-mail: ceragiol@calvino.polito.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Firenze) - Ciclo XI
Direttori di ricerca: Prof. Andrea Bacciotti, Politecnico di Torino,
e Prof. Roberto Conti, Università di Firenze