Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Cinzia Cerroni

Disegni divisibili e loro automorfismi

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.3, p. 311–314.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_3_311_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie 8, Vol. III-A, Dicembre 2000, 311-314

Disegni divisibili e loro automorfismi.

Cinzia Cerroni

1 – Nozioni preliminari.

In questa tesi ci siamo occupati di costruire t-disegni divisibili. Essi costituiscono una generalizzazione dei t-disegni classici. Infatti, un t-disegno divisibile è una terna $(X, \mathcal{B}, \mathcal{R})$, dove X è un insieme finito, $\mathcal{R}$ è una partizione di X, i cui elementi hanno tutti la stessa cardinalità, $\mathcal{B}$ è una famiglia di sottoinsiemi di X, aventi tutti la stessa cardinalità, con la proprietà che ciascuno di essi interseca ogni elemento della partizione in al più un punto. Inoltre, preso comunque un t-sottoinsieme, che interseca ogni elemento della partizione in al più un punto, esistono esattamente λ elementi di $\mathcal{B}$ che lo contengono. Pertanto, un t-disegno divisibile nel quale ogni elemento di $\mathcal{R}$ ha cardinalità uno, è un t-disegno. Una particolare importanza hanno i 2-disegni divisibili con $\lambda = 1$, infatti da essi si costruiscono i "Balanced Incomplete Block Design" (BIBD) (cfr. [1]). È da osservare che buona parte dei 2-disegni divisibili costruiti in questo lavoro hanno $\lambda = 1$. Inoltre, i metodi utilizzati per produrli fanno tutti uso di costruzioni geometriche, e forniscono classi infinite di t-disegni divisibili. Questo tipo di strutture geometriche ha particolare importanza applicativa nel campo della teoria dei codici (cfr. [5]).

Nel lavoro [6] è stata introdotta una tecnica per costruire t-disegni divisibili utilizzando R-gruppi di permutazioni t-R-omogenei. In particolare, è stato dimostrato il seguente teorema, che è una generalizzazione del ben noto risultato di D. R. Hughes per i t-disegni.

Teorema 1.1. – *Sia (G, X, R) un R-gruppo di permutazioni t-R-omogeneo, e sia $|X| = v$. Se B è un k-sottoinsieme R-trasversale di X, $t \leq k < v$, e $B^G = \{B^g \mid g \in G\}$, allora $(X, B^G, \mathcal{R})$, dove $\mathcal{R}$ è la partizione associata ad R, è un t-(s, k, λ_t)-disegno divisibile con $b = \dfrac{|G|}{|G_B|}$, $s = |[x]|$ per qualche $x \in X$, e $\lambda_t = \dfrac{|G|\binom{k}{t}}{|G_B|\binom{v/s}{t}s^t}$. Inoltre, $(X, B^G, \mathcal{R})$ ammette G come gruppo di automorfismi transitivo sui punti e sui blocchi.*

Quindi, per costruire t-divisibili facendo uso di questo risultato, il primo passo è quello di determinare R-gruppi di permutazioni t-R-omogenei; il secondo passo è quello di fissare un opportuno blocco base, ed infine quello di riuscire a calcolare lo stabilizzatore del blocco base fissato. Di particolare importanza, sia nella costruzione dei t-disegni divisibili, sia indipendentemente da essi, è quindi la determinazione di R-gruppi di permutazioni t-R-omogenei. Inoltre, è chiaro che il precedente teorema è valido se per ipotesi si considera (G, X, R) un R-gruppo di permutazioni t-R-transitivo.

2. – Costruzione di disegni divisibili da piani di traslazione.

Ci siamo, quindi, occupati di costruire R-gruppi di permutazioni 2-R-transitivi, utilizzando gruppi di collineazioni di piani di traslazione 2-transitivi su di un sottoinsieme della retta all'infinito. Infatti, in [4] è stato dimostrato il seguente teorema.

TEOREMA 2.1. – *Sia $\mathcal{A}$ un piano affine di traslazione, e sia T il suo gruppo delle traslazioni. Supponiamo che $\mathcal{A}$ ammetta un gruppo di collineazioni G che agisce in modo 2-omogeneo su un sottoinsieme di punti Ω, dove $|\Omega| \geq 2$, della retta all'infinito l_∞. Definiamo il seguente insieme di rette,*

$$\mathcal{L}(\Omega) := \{ l \in \mathcal{A} \mid l \cap l_\infty \in \Omega \}.$$

Allora, se R è la relazione di parallelismo indotta su $\mathcal{L}(\Omega)$, $(TG, \mathcal{L}(\Omega), R)$ è un R-gruppo di permutazioni 2-R-omogeneo.

Inizialmente abbiamo considerato i piani di traslazione desarguesiani. Essi ammettono un gruppo di collineazioni G, isomorfo ad AGL$(1, q)$, con $q = p^j$, p primo, 2-transitivo su $\Omega = l_\infty \setminus \{(\infty)\}$. Pertanto, il gruppo TG è un R-gruppo di permutazioni 2-R-transitivo sull'insieme, $\mathcal{L}(\Omega)$, delle rette del piano che hanno come punto all'infinito un elemento di Ω. Come insieme di punti dei disegni divisibili che abbiamo costruito usando questo gruppo, abbiamo scelto l'insieme di rette $\mathcal{L}(\Omega)$, e, come blocco base, abbiamo fissato il sottoinsieme di $\mathcal{L}(\Omega)$ costituito dalle rette per l'origine che hanno come punto all'infinito un punto che ha coordinata appartenente ad un sottogruppo H del gruppo moltiplicativo del campo finito che coordinatizza il piano. Abbiamo così ottenuto due famiglie di 2-disegni divisibili di parametri $(p^j, p^s, 1)$, con $s | j$, e $(p^j, h+1, h+1)$, dove $h+1$ non è una potenza di p, e $|H| = h$.

Successivamente, abbiamo considerato i piani di traslazione di Albert (cfr. [1]). Essi sono gli unici piani di traslazione non desarguesiani che ammettono un gruppo di collineazioni 2-transitivo su $\Omega = l_\infty \setminus (\infty)$. Quindi, il gruppo totale delle collineazioni di questi piani è 2-R-transitivo sull'insieme $\mathcal{L}(\Omega)$. Questi piani sono coordinatizzati dall' algebra di divisione $(GF(q^n), +, \circ)$, dove $\circ$ è il prodotto "twisted". Come insieme di punti dei 2-disegni divisibili che abbiamo costruito, abbiamo considerato l'insieme $\mathcal{L}(\Omega)$, delle rette del piano di Albert, che intersecano la retta all'infinito in $l_\infty \setminus (\infty)$, e come blocco base abbiamo fissato l'insieme delle rette per l'origine che intersecano la retta all'infinito in un punto di coordinata $(m \cdot e)$, dove $m \in GF(p^d)$, d è un intero che divide n, "$\cdot$" è il prodotto sul campo GF(q^n) ed e è l'identità dell'algebra coordinatizzante. I 2-disegni divisibili così ottenuti hanno parametri $(q^n, p^d, 1)$ ed ammettono il gruppo totale delle collineazioni dei piani di Albert come gruppo di automorfismi.

Continuando la nostra indagine, abbiamo provato che un piano di traslazione, coordinatizzato da una generica algebra di divisione D, ammette un gruppo di collineazioni G, 2-transitivo sul sottoinsieme $(N_r(D))$ della retta all'infinito, costituito dai punti che hanno coordinata nel nucleo destro dell'algebra. È da notare che questo risultato ha un significato indipendente nella teoria dei piani di traslazione, ed inoltre fornisce una tecnica generale per costruire R-gruppi di permutazioni 2-R-transitivi e, di conseguenza, 2-disegni divisibili, a partire da piani coordinatizzati da algebre di divisione. Con questa tecnica abbiamo costruito nuovamente 2-disegni divisibili a partire dai piani di Albert, diversi da quelli precedentemente costruiti.

3 – Costruzione di disegni divisibili a partire dallo spazio proiettivo 3-dimesionale.

Nel terzo capitolo, abbiamo determinato R-gruppi di permutazione t-R-transitivi, a partire dallo spazio proiettivo tridimensionale $\mathrm{PG}(3, q)$ di ordine q, facendo uso di gruppi di collineazioni di piani proiettivi che agiscono in modo t-transitivo su opportuni sottoinsiemi di rette. Più precisamente, sia G un gruppo di collineazioni che agisce su un piano fissato che assumiamo come piano all'infinito di $\mathrm{PG}(3, q)$. Allora, $G \cong \overline{G}/\overline{G} \cap Z(GL(3, q))$, dove $\overline{G} \leqslant GL(3, q)$. Immergiamo $\overline{G}$ nel gruppo proiettivo generale $\mathrm{PGL}(4, q)$, gruppo totale delle proiettività di $\mathrm{PG}(3, q)$, come segue:

$$\widetilde{G} = \left\{ \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & A & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\, A \in \overline{G} \right\}.$$

Abbiamo quindi dimostrato il seguente teorema

TEOREMA 3.1. – *Sia* $\mathrm{AG}(3, q)$ *lo spazio affine tridimensionale di ordine* q *e sia* Ω *un insieme di rette del suo piano all'infinito* E, *con* $|\Omega| \geqslant 2$. *Denotiamo con* $\pi(\Omega)$ *l' insieme*

$$\Pi(\Omega) = \{\pi \text{ un piano di } \mathrm{AG}(3, q) \,|\, \pi \cap E \in \Omega\}.$$

Allora,

(i) *se* G *è un sottogruppo di* $\mathrm{PGL}(3, q)$ *che agisce* 2*-transitivamente sull'insieme* Ω, *il gruppo* $(T\widetilde{G}, \pi(\Omega), R)$ *è un* R*-gruppo di permutazioni* 2-R*-transitivo;*

(ii) *se* G *è un sottogruppo di* $\mathrm{PGL}(3, q)$ *che agisce* 3*-transitivamente sull'insieme* Ω, *e se non vi sono tre rette concorrenti in* Ω, *il gruppo* $(T\widetilde{G}, \pi(\Omega), R)$ *è un* R*-gruppo di permutazioni* 3-R*-transitivo;*

dove $\widetilde{G}$ *e* T *sono definiti come sopra ed* R *è la relazione di parallelismo su* $\mathrm{AG}(3, q)$.

Osserviamo che, in questo caso, si ottengono anche R-gruppi di permutazioni 3-R-transitivi, e pertanto si costruiscono anche 3-disegni divisibili. Quindi, abbiamo costruito t-disegni divisibili facendo uso di questi gruppi. In particolare, abbiamo scelto come insieme di punti i piani che intersecano il piano all'infinito nelle rette tangenti ad una conica. Infatti, il gruppo proiettivo ortogonale agisce 3-transitivamente sull'insieme delle rette tangenti ad una conica. In questo caso, per q dispari, il gruppo $T\widetilde{G}$, con $\widetilde{G} \cong \mathrm{GO}(3, q)$, è 3-$R$-transitivo, e per q pari è 2-R-

transitivo, essendo le rette tangenti ad una conica concorrenti. Abbiamo scelto come blocchi base opportuni sottoinsiemi di questi insiemi di piani.

In seguito, abbiamo considerato come insieme di punti, dei 2-disegni divisibili che abbiamo costruito, l'insieme dei piani che intersecano il piano all'infinito nelle rette tangenti ad una curva Hermitiana. Infatti, il gruppo proiettivo unitario agisce 2-transitivamente sull'insieme delle rette tangenti ad una curva Hermitiana. Quindi, si ottiene il gruppo 2-R-transitivo, $T\widetilde{G}$, con $\widetilde{G} \cong \mathrm{GU}(3, q^2)$. Anche in questo caso, si sono scelti come blocchi base opportuni sottoinsiemi dell' insieme dei piani che intersecano il piano all'infinito nelle rette tangenti ad una curva Hermitiana. Un particolare blocco base, del quale è stato effettivamente laborioso calcolare lo stabilizzatore, è l'insieme dei piani che interesecano il piano all'infinito nelle rette tangenti ad una conica, ottenuta come intersezione della curva Hermitiana e di un opportuno sottopiano del piano all'infinito.

Infine, abbiamo considerato, come insieme di punti, l'insieme di tutti i piani affini. Infatti, è noto che il gruppo proiettivo lineare agisce 2-transitivamente sull'insieme di tutte le rette di un piano proiettivo. Pertanto, si ottiene l'R-gruppo di permutazione 2-R-transitivo, $T\widetilde{G}$, con $\widetilde{G} \cong \mathrm{GL}(3, q)$. In questo caso, come blocchi base per costruire i 2-disegni divisibili, abbiamo scelto i sottoinsiemi dei piani che intersecano il piano all'infinito nelle rette tangenti ad una conica e nelle rette tangenti ad una curva Hermitiana. Con queste classi infinite di 2-disegni divisibili si conclude il lavoro.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. A. Albert, *Finite non commutative division algebras*, Proc. Amer. Math. Soc., **9** (1958), 929-932.

[2] H. Hanani, *Balanced incomplete block designs and related designs*, Discrete Math., **11** (1975), 255-369.

[3] D. R. Hughes e F. C. Piper, *Projective planes,* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1973).

[4] R. H. Schulz e A. G. Spera, *Divisible designs admitting a Suzuki group as an automorphism group,* Boll. U.M.I., **(8) I-B- 3** (1998), 705-714.

[5] R.-H. Schulz e A. G. Spera, *Automorphisms of constant weight codes and of divisible designs,* Designs, Codes and Cryptography (DESI) (to appear).

[6] A. G. Spera, *t-Divisible designs from imprimitive permutation groups,* Europ. J. Comb., **13** (1992), 409-417.

Dipartimento di Matematica ed Applicazioni, Università di Palermo
e-mail: cerroni@dipmat.math.unipa.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Messina) - Ciclo XI
Direttore di ricerca: Prof. A.G. Spera, Università di Palermo