BOLLETTINO

UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

RENZA CORTINI

Il grado di irrazionalità di varietà algebriche

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 3-A—La Matematica nella Società e nella Cultura (2000), n.3, p. 315–318.

Unione Matematica Italiana

http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_3_315_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Il grado di irrazionalità di varietà algebriche.

RENZA CORTINI

Per un campo L , che sia una estensione finitamente generata di un campo base k con grado di trascendenza n , si definisce grado di irrazionalità di L su k , $\text{deg}_{\text{irr}_k}(L)$, il seguente numero:

$$\min \{m \mid m = [L : k(x_1, \dots, x_n)],$$

dove $(x_1, \dots, x_n)$ sono elementi algebricamente indipendenti di $L\}$

Quando è chiaro quale sia il campo base a cui ci si riferisce, questo numero viene indicato semplicemente con $\text{deg}_{\text{irr}}(L)$.

Sebbene la definizione data sia algebrica, almeno per quanto riguarda estensioni di campi base algebricamente chiusi di caratteristica zero, tecniche puramente algebriche sembrano non fornire risposte esaustive per il calcolo del grado di irrazionalità. In tali casi è preferibile un approccio più geometrico, considerando i campi L in questione come i campi delle funzioni razionali di varietà algebriche V definite sopra k . In tal modo, quando per una varietà algebrica V (definita sopra k) si parlerà di grado di irrazionalità, $\text{deg}_{\text{irr}}(V)$, si intenderà sempre il grado di irrazionalità di $K(V)$, dove $K(V)$ è appunto il suo campo delle funzioni razionali.

La definizione geometrica suggerisce un nuovo modo di pensare al grado di irrazionalità in termini di mappe:

$$\min \{m \mid \exists f : V \rightarrow \mathbf{P}^m, \text{ con } f \text{ mappa razionale dominante di grado } m\}.$$

Dalle due definizioni è comunque chiaro che quello di cui stiamo parlando è un invariante birazionale per varietà.

In tal modo il grado di irrazionalità può essere pensato come una generalizzazione, in dimensione maggiore o uguale a 2, del concetto di *gonalità* per curve. Il teorema di Wirtinger, risultato classico della teoria delle curve piane, asserisce che una tale curva liscia non possiede serie lineari g_k^1 con $k \leq d - 2$ e che ogni g_{d-1}^1 è generata da un pencil di rette passanti attraverso un suo punto.

Partendo da questo risultato ci siamo chiesti se fosse possibile stabilire il grado di irrazionalità per ipersuperficie lisce di spazi proiettivi.

Inizialmente abbiamo affrontato il problema per le superficie, per le quali erano già noti alcuni risultati dovuti al matematico giapponese Hisao Yoshihara (si veda ad esempio [3]).

Gli strumenti che ci hanno permesso di generalizzare i risultati del matematico giapponese, e ai quali è dedicata la parte introduttiva della tesi, sono i differenziali indotti di Mumford ([2]) e, conseguentemente, le corrispondenze a traccia nulla su superficie di Lopez e Pirola ([1]).

Sono proprio questi gli strumenti che ci hanno permesso di classificare le superficie lisce di $\mathbf{P}^3$ di grado $d \geq 5$ con grado di irrazionalità più piccolo possibile:

TEOREMA 1. – *Sia $S \subset \mathbf{P}^3$ una superficie liscia di grado $d \geq 5$. Allora $\text{deg}_{\text{irr}}(S) = d - 2$ se e soltanto se*

i) S contiene una cubica gobba, o

*ii) S contiene una retta l e una curva (razionale) C di grado e che incontra la retta in $e - 1$ punti;
altrimenti S ha grado di irrazionalità $d - 1$.*

Grazie alla classificazione data col precedente teorema, abbiamo scoperto nuovi esempi per un problema posto da Yoshihara nel 1994 ([3]). Si tratta di un problema di “dominanza”. Data una mappa razionale dominante tra curve, $f: C \rightarrow C'$, è ben noto che $\text{deg}_{\text{irr}}(C) \geq \text{deg}_{\text{irr}}(C')$. Sappiamo anche se una superficie razionale S (cioè $\text{deg}_{\text{irr}}(S) = 1$) ne domina una seconda S' , allora $\text{deg}_{\text{irr}}(S') = 1$. In contrasto con questo, in dimensione 3, già dal 1971, grazie ai lavori di Iskovskih e Manin e Clemens e Griffiths, erano noti esempi di varietà tridimensionali unirazionali ma non razionali. A partire da queste osservazioni Yoshihara si chiese se data una mappa razionale dominante $f: S \rightarrow S'$ fra superficie, allora dovesse essere necessariamente vero che $\text{deg}_{\text{irr}}(S) \geq \text{deg}_{\text{irr}}(S')$. Ha risposto egli stesso negativamente al problema alla fine del 1998 ([4]). Usando la caratterizzazione del teorema vengono dati nuovi esempi per il problema, dimostrando che la generica superficie liscia $S \subset \mathbf{P}^3$ di grado $d \geq 5$ tra quelle contenenti una retta fissata l ha grado di irrazionalità $d - 1$, mentre è dominata da una superficie S' con grado di irrazionalità $d - 2$.

Un altro corollario al Teorema, risponde ad un altro problema lasciato aperto da Yoshihara. Nello stesso lavoro del 1994, dopo aver dimostrato che la generica superficie liscia di grado 4 di $\mathbf{P}^3$ ha grado di irrazionalità 3, Yoshihara si chiedeva se si potesse generalizzare il risultato dimostrando che la generica superficie liscia di $\mathbf{P}^3$ di grado $d \geq 5$ ha grado di irrazionalità $d - 1$ ([3]). Un corollario al teorema risponde affermativamente al problema:

COROLLARIO 1. – *Sia $S \subset \mathbf{P}^3$ una generica superficie liscia di grado $d \geq 5$. Allora $\text{deg}_{\text{irr}}(S) = d - 1$.*

Coro Un problema a parte è costituito dalle superficie K3. Possiamo osservare come tali superficie siano le prime a “sfuggire” alle nostre classificazioni. Tale stranezza è dovuta in primo luogo al fatto che, avendo canonico banale, dette su-

perficie sono anche le prime a sfuggire alla classificazione delle corrispondenze di grado piccolo a traccia nulla di Lopez e Pirola ([1]).

In tale direzione si è osservato che la generica K3 di $\mathbf{P}^3$ tra quelle contenenti una curva iperellittica di grado 6 e genere 2 fissata ha grado di irrazionalità 2, pur non contenendo rette o cubiche gobbe.

Salendo di codimensione, si è dimostrato che la generica K3 di $\mathbf{P}^4$ ha grado di irrazionalità 3. Infine abbiamo un risultato per le K3 normali di $\mathbf{P}^g$ di grado $2g - 2$, che, nel caso contengano la curva razionale normale immersa in un $\mathbf{P}^{g-3} \subset \mathbf{P}^g$, hanno grado di irrazionalità 2.

Sempre per varietà in codimensione 1, abbiamo osservato come i differenziali indotti di Mumford siano utili anche nel caso dei 3-folds di $\mathbf{P}^4$ e, più in generale, per le ipersuperficie lisce dello spazio proiettivo n dimensionale.

In questa direzione, nell'ultima parte della tesi, si è dimostrato che il grado di irrazionalità di un 3-fold di $\mathbf{P}^4$ di grado $d \geq 6$ può essere solamente $d - 3$, $d - 2$, $d - 1$ e, analogamente, una ipersuperficie liscia di $\mathbf{P}^n$ di grado $d \geq n + 2$ ha grado di irrazionalità compreso tra $d - n + 1$ e $d - 1$.

Il problema si complica per varietà in codimensione maggiore, già a partire dalle intersezioni lisce complete di $\mathbf{P}^4$. Con tecniche analoghe alle precedenti, si riescono comunque a dare delle stime. Ancora una volta, sebbene in codimensione più alta la presenza di rette sulla superficie influenza notevolmente il grado di irrazionalità che, ad esempio, diventa il più piccolo possibile se la superficie in questione che contiene la retta è l'intersezione completa di una iperquadrica con una ipersuperficie di grado $d \geq 4$ in $\mathbf{P}^4$. Per la precisione vale il seguente Teorema:

TEOREMA 2. – *Sia $S = Q \cap X \subset \mathbf{P}^4$ l'intersezione di una iperquadrica liscia con una ipersuperficie liscia di grado $d \geq 4$. S ha grado di irrazionalità $d - 1$ se e soltanto se contiene una retta.*

Infine, le tecniche usate per le intersezioni complete di $\mathbf{P}^4$, forniscono discreti risultati anche per quanto riguarda le intersezioni complete di $\mathbf{P}^5$ di dimensione 3. Ad esempio si è dimostrato che per l'intersezione completa di una iperquadrica con una ipersuperficie di grado $d \geq 3$ di $\mathbf{P}^5$ il grado di irrazionalità può essere solamente $d - 2$, $d - 1$ o d .

BIBLIOGRAFIA

- [1] A.F. LOPEZ e G.P. PIROLA, *On the curves through a general point of a smooth surface in $\mathbf{P}^3$* , Math. Z., **219** (1995), 93-106.
- [2] D. MUMFORD, *Rational equivalence of 0-cycles on surfaces*, J. Math. Kyoto Univ., **9** (1969), 195-204.

- [3] H. YOSHIHARA, *Degree of irrationality of an Algebraic Surface*, J. of Algebra, **167** (1994), 139-172.
- [4] H. YOSHIHARA, *A note on the Inequality of Degrees of Irrationality of Algebraic Surfaces*, J. of Algebra, **207** (1998), 272-275.

Dipartimento di Matematica, Politecnico di Torino

e-mail: cortini@dm.unito.it

Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Genova) - Ciclo XI

Direttore di ricerca: Prof. Gian Pietro Pirola, Università degli Studi di Pavia