Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Giuseppe De Donno

Ipoellitticità Gevrey per equazioni alle derivate parziali con caratteristiche di molteplicità elevata

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.3, p. 319–322.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_3_319_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie 8, Vol. III-A, Dicembre 2000, 319-322

Ipoellitticità Gevrey per equazioni alle derivate parziali con caratteristiche di molteplicità elevata.

GIUSEPPE DE DONNO

1 – Introduzione e notazioni.

Questa tesi tratta il problema della ipoellitticità C^∞ ($Pu \in C^\infty \Rightarrow u \in C^\infty$) e della ipoellitticità nelle classi di Gevrey ($Pu \in G^s \Rightarrow u \in G^s$) per una particolare classe di operatori differenziali lineari P a coefficienti analitici con caratteristiche involutive di molteplicità $m \geqslant 4$, nel caso in cui le condizioni di Levi sui termini di ordine inferiore non sono soddisfatte. Gli strumenti e le tecniche utilizzati nelle dimostrazioni sono quelli dell'analisi microlocale, quali operatori pseudo-differenziali, fronte d'onda di Hörmander ed operatori integrali di Fourier (FIO). Negli enunciati intervengono, oltre agli invarianti geometrici standard del simbolo principale e del simbolo sub-principale dell'operatore, anche, nel caso delle caratteristiche multiple, gli invarianti geometrici di ordine inferiore. Gli operatori considerati inizialmente sono ricondotti, mediante la composizione con FIO, a modelli più semplici che si possono studiare nell'ambito delle classi $S^m_{\varrho,\delta}$ dei simboli pseudo-differenziali. Opportune stime sulle derivate del simbolo dell'operatore e ulteriori ipotesi sul segno di parte reale ed immaginaria dei termini di ordine inferiore, sono allora sufficienti per ottenere risultati di micro-ipoellitticità Gevrey e dunque di ipoellitticità Gevrey. Nella parte finale della tesi viene fornita anche una versione semilineare del risultato.

Nel seguito saranno utilizzate le notazioni standard: $\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, \ldots\}$, $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$; dati due multi-indici $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, poniamo $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!$, per $x \in \mathbb{R}^n$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, $|x| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$, $\partial_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$, $D^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \cdots D_{x_n}^{\alpha_n}$, $D_{x_j} = -i\partial_{x_j}$, $j = 1, \ldots, n$. Una funzione $u(x)$ appartiene alla classe delle funzioni Gevrey di ordine s in Ω, $G^s(\Omega)$, $s \geqslant 1$, Ω insieme aperto di $\mathbb{R}^n$, se $u(x) \in C^\infty(\Omega)$ e per ogni sottoinsieme compatto K di Ω si ha che per ogni multi-indice α e per ogni $x \in K$: $|\partial^\alpha u(x)| \leqslant RC^{|\alpha|}(\alpha!)^s$, per opportune costanti R, C indipendenti da α e da $x \in K$. Dato $m \in \mathbb{R}$, l'insieme $S^m_{\varrho,\delta}$, $0 \leqslant \delta < \varrho \leqslant 1$, dei simboli pseudo-differenziali è costituito dalle funzioni $\sigma(x, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ tali che per ogni coppia di multi-indici α, β, esiste una costante positiva $C_{\alpha,\beta}$ con $|(D_x^\alpha D_\xi^\beta \sigma(x, \xi))| \leqslant C_{\alpha,\beta}(1 + |\xi|)^{m - \varrho|\beta| + \delta|\alpha|}$. Definiamo lo spazio di Sobolev anisotropo H^p_* in $\mathbb{R}^2$, come l'insieme delle funzioni f tali che $\hat{f}(\xi)[\xi]^p \in L^2$, $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$, dove $\hat{f}$ è la trasformata di Fourier di f e $[\xi] = |\xi_1| + |\xi_2|^{\frac{q}{m}}$, $q, m \in \mathbb{Z}_+$, $\frac{q}{m} < 1$.

2 – Presentazione dei risultati ottenuti.

Consideriamo un operatore differenziale lineare $P = \sum_{|\alpha| \leqslant M} c_\alpha(x) D^\alpha$, e supponiamo che i coefficienti $c_\alpha(x)$ siano analitici, in un intorno Ω di un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Introduciamo il simbolo principale dell'operatore, $p_M(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = M} c_\alpha(x) \xi^\alpha$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. Al fine di studiare il caso delle caratteristiche multiple, ragionando dal punto di vista dell'analisi microlocale, fissiamo $\xi_0 \neq 0$ e poniamo:

DEFINIZIONE 2.1. – *P è un operatore con caratteristiche di molteplicità costante $m \geqslant 2$ in (x_0, ξ_0) se in un intorno conico $\Gamma \subset \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus 0)$ di (x_0, ξ_0) si può scrivere $p_M(x, \xi) = e_{M-m}(x, \xi)\, a_1(x, \xi)^m$, dove $e_{M-m}(x, \xi)$ è un simbolo analitico ellittico omogeneo di ordine $M - m$, ed il simbolo analitico omogeneo del primo ordine $a_1(x, \xi)$ è a valori reali e di tipo principale microlocale: $d_{x,\xi} a_1(x, \xi)$ è diverso da zero e non è parallelo a $\sum_{j=1}^{n} \xi_j dx_j$, se valutato su $\Sigma = \{(x, \xi) \in \Gamma,\ a_1(x, \xi) = 0\}$. Σ è anche varietà caratteristica di $p_M(x, \xi)$.*

Per P soddisfacente a tale definizione, vogliamo studiare l'ipoellitticità o, più precisamente, la micro-ipoellitticità nel punto $(x_0, \xi_0) \in \Sigma$. Il simbolo sub-principale di P, $p'_{M-1}(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = M-1} c_\alpha(x)\, \xi^\alpha - \frac{1}{2i} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial \xi_j} p_M(x, \xi)$, è un invariante geometrico su Σ; poniamo $J^0(x, \xi) = p'_{M-1}(x, \xi)\,|_\Sigma$. Facciamo l'ulteriore ipotesi,

(1) *su Γ, $p_M(x, \xi)$ ha valori reali e, per m pari, non negativi.*

È noto da Liess-Rodino [4] che per $\Im J^0(x_0, \xi_0) \neq 0$ si ha micro-ipoellitticità e s-micro-ipoellitticità in (x_0, ξ_0) per $s \geqslant \frac{m}{m-1}$. In questa tesi si considera il caso $\Im J^0(x_0, \xi_0) = 0$, ma si chiede $\Re J^0(x_0, \xi_0) \neq 0$. Supponiamo precisamente

(2) $$\Re J^0(x, \xi) < 0 \quad \textit{per } (x, \xi) \in \Sigma .$$

Nel caso di molteplicità $m \geqslant 3$, si considerano gli invarianti geometrici di ordine inferiore $J^r(x, \xi, X) = \frac{1}{r!} \chi^r p'_{M-1}(x, \xi)$, per $(x, \xi, X) \in N(\Sigma)$, $1 \leqslant r \leqslant m-2$, dove $N(\Sigma)$ è il fibrato normale della varietà caratteristica Σ e χ è un campo vettoriale su Γ tale che $\chi(x, \xi)$, per $(x, \xi) \in \Sigma$, è nella stessa classe di equivalenza di $X \in N_{(x,\xi)}(\Sigma)$. Si ha inoltre $J^r(x, \xi, -X) = (-1)^r J^r(x, \xi, X)$. Per uniformità di notazioni si può pensare J^0 come una funzione su $N(\Sigma)$, indipendente da X in (x, ξ).

TEOREMA 1. – *Sia P un operatore con molteplicità costante m, soddisfacente (1), (2). Supponiamo inoltre che esista r^*, $0 < r^* < \frac{(m-1)}{2}$, $(m \geqslant 4)$ tale che*

i) $\Im J^{r^*}(x, \xi, X) \neq 0$, per ogni $(x, \xi, X) \in N(\Sigma)$, $X \neq 0$

ii) $\Im J^{r^*}(x, \xi, X)\, \Im J^r(x, \xi, X) \geqslant 0$, per ogni $(x, \xi, X) \in N(\Sigma)$, $0 \leqslant r < r^*$.

Allora P è micro-ipoellittico e s-micro-ipoellittico per $s \geqslant \frac{m}{m-1-r^*}$.

Il Teorema 2.1 è un'estensione del risultato di Liess-Rodino ([5], Teorema 6.3), il quale fornisce lo stesso ordine di ipoellitticità Gevrey, richiedendo *i)* e $\Im J^r = 0$ per tutti gli $r < r^*$. Facendo la composizione dell'operatore P con un FIO F della forma standard

(3) $$Ff(x) = (2\pi)^{-n} \int exp[iw(x, \eta)]\, b(x, \eta)\, \hat{f}(\eta)\, d\eta, \qquad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

con fase $w(x, \eta)$ ed ampiezza $b(x, \eta)$ opportune, è possibile leggere le stesse ipotesi del Teorema 2.1 sui coefficienti dei termini di ordine inferiore di un opportuno operatore $\widetilde{P} = FPF^{-1}$, il cui simbolo è

$$\tilde{p}(y, \eta) = \eta_1^m - h_{0, m-1}(y, \eta)\, \eta_2^{m-1} + \sum_{(r, t) \in I} h_{r, t}(y, \eta)\, \eta_1^r \eta_2^t, \tag{4}$$

dove le funzioni $h_{(\cdot, \cdot)}(y, \eta)$ e l'insieme I saranno specificate nel prossimo paragrafo. Precisiamo che per ottenere (4) occorre fissare una trasformazione canonica omogenea e analitica, cioè che conserva la due-forma simplettica $\sum_{j=1}^{n} dy_j \wedge d\eta_j = \sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge d\xi_j$, e considerare un FIO con funzione fase corrispondente alla trasformazione canonica suddetta. Risulta immediato verificare che P è ipoellittico, o Gevrey-ipoellittico, se e solo se tale è $\widetilde{P}$.

3 – Lemma di ipoellitticità e dimostarzione del Teorema 2.1.

In questo paragrafo viene studiato un modello di operatore pseudo-differenziale che generalizza quello in (4). Sia $x = (x_1, \dots, x_n)$ la variabile reale in Ω, insieme aperto di $\mathbb{R}^n$; $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, $\xi_2 > 0$, le variabili duali di x. Inoltre siano $q, m \in \mathbb{Z}_+$ tali che $m \geq 2$, $1 \leq q \leq m-1$, e sia $I = \{(r, t) \in \mathbb{N}^2 : 0 < qr + mt < qm\}$.

Sia inoltre

$$p(x, \xi) = \xi_1^m - h_{0, q}(x, \xi)\, \xi_2^q + \sum_{(r, t) \in I} h_{r, t}(x, \xi)\, \xi_1^r \xi_2^t, \tag{5}$$

un polinomio differenziale, simbolo di un (micro) operatore pseudo-differenziale $P = P(x, D)$, definito in Γ, dove $h_{(\cdot, \cdot)} \in G^1(\Gamma)$, classe delle funzioni analitiche. Per $k \in \mathbb{N}$, $0 < k < qm$, definiamo gli insiemi $I_k = \{(r, t) \in \mathbb{N}^2 : qr + mt = k\}$ e fissiamo $k = k^*$ tale che $q\left(m - \frac{1}{2}\right) < k^* < qm$. Denotiamo con k^- tutti i $k < k^*$ e con k^+ tutti i $k > k^*$. Si ha $I = I_- \cup I_{k^*} \cup I_+$, con $I_- = \cup I_{k^-}$, $I_+ = \cup I_{k^+}$.

LEMMA 3.1. – *Sia $p(x, \xi)$ la funzione* (5), *con $h_{(\cdot, \cdot)}(x, \xi)$ omogenea di ordine zero rispetto alle variabili ξ ed analitica. Supponiamo inoltre che I_{k^*} consista di una sola coppia (r^*, t^*), $k^* = qr^* + mt^*$, tale che:*

$$\begin{aligned}
&i)\ \Im h_{r^*, t^*}(x, \xi) = 0, \ \textit{per ogni}\ (x, \xi) \in \Gamma,\\
&ii)\ \Im h_{r^*, t^*}(x, \xi)\, \Im h_{r, t}(x, \xi)\, \xi_1^{r^*+r} \xi_2^{t+t^*} \geq 0, \ \begin{array}{c} \textit{per ogni}\ (x, \xi) \in \Gamma \\ k^* < k^+ = qr + mt < qm, \end{array}\\
&iii)\ \Im h_{0, q}(x, \xi)\, \Im h_{r^*, t^*}(x, \xi)\, \xi_1^{r^*} \xi_2^{q+t^*} \leq 0, \ \textit{per ogni}\ (x, \xi) \in \Gamma,\\
&iv)\ \Re h_{0, q}(x, \xi) \neq 0, \ \textit{per ogni}\ (x, \xi) \in \Gamma.
\end{aligned} \tag{6}$$

Allora per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, per ogni $K \subset\subset \Omega$, si ha, per opportune costanti L e B indipendenti da α, β:

$$\frac{|D_x^\alpha D_\xi^\beta p(x, \xi)|\, |\xi|^{\varrho|\beta| - \delta|\alpha|}}{|p(x, \xi)|} \leq L^{|\alpha| + |\beta| + 1} \alpha! \beta!, \quad |\xi| > B, \tag{7}$$

dove $\varrho = \frac{k^* - q(m-1)}{m}$, $\delta = \frac{qm - k^*}{m}$. *Notiamo che* $\delta < \varrho$, *poiché* $k^* > q\left(m - \frac{1}{2}\right)$.

Per la dimostrazione si veda De Donno-Rodino[1].

REMARK 3.1. – *Dalla formula* (7) *e a da Kajitani-Wakabayashi* ([3], *Teorema* 1.9), *si ha che l'operatore* $P(x, D)$, *associato al simbolo* $p(x, \xi)$ *in* (5), *è* G^s-*micro-localmente ipoellittico in* Γ *per* $s \geq max\left\{\frac{1}{\varrho}, \frac{1}{1-\delta}\right\} = \frac{1}{\varrho}$.

REMARK 3.2. – *Per la dimostrazione del Teorema* 2.1 *sarà sufficiente applicare il Lemma* 3.1 *per* $q = m-1$. *Infatti la varietà caratteristica di* $\tilde{P}$ *è il sottoinsieme* $\Sigma = \{\eta_1 = 0\}$, *segue che il simbolo sub-principale è dato da* $\tilde{p}'_{m-1}(y, \eta)\,|_{\eta_1=0} = p_{m-1}(y, \eta)\,|_{\eta_1=0} := h_{0,m-1}(y, \eta)\,\eta_2^{m-1}$. *Se consideriamo un campo vettoriale* χ *proporzionale a* ∂_{η_1} *per un fattore che denotiamo ancora con* η_1 *dopo la derivazione, otteniamo* $J^r(y, \eta, Y) = \frac{1}{r!}\chi^r \tilde{p}'_{m-1}(y, \eta) = \frac{1}{r!}\partial^r_{\eta_1} p_{m-1}(y, \eta)\,|_{\eta_1=0}\,\eta_1^r = h_{r,t}(y, \eta)\,\eta_1^r \eta_2^t$, *per* $h_{r,t}(y, \eta) := \frac{1}{r!}\frac{\partial^r_{\eta_1} p_{m-1}(y, \eta)\,|_{\eta_1=0}}{\eta_2^t}$.

Il modello studiato si può generalizzare al caso delle caratteristiche di codimensione $n' > 1$ (involutive), si veda De Donno-Rodino [1], per operatori del tipo:

$$p(x, \xi) = \sum_{|\alpha'|=m} a_{\alpha'}(x, \xi)\,\xi'^{\alpha'} - h_{0,q}(x, \xi)\,\xi_n^q + \sum_{(\beta', t) \in I} h_{\beta', t}(x, \xi)\,\xi'^{\beta'}\xi_n^t, \tag{8}$$

dove il simbolo principale è ξ'-ellittico e $\xi = (\xi', \xi'', \xi_n)$, $\xi' \in \mathbb{R}^{n'}$, $\xi'' \in \mathbb{R}^{n-n'-1}$, $I = \{(\beta', t) : q|\beta'| + mt < qm\}$, ottenendo lo stesso risultato di s-micro-ipoellitticità. Infine data una funzione non lineare $F(x, D^\gamma u)$ analitica, si prova per l'equazione semilineare $P(x, D)\,u + F(x, D_{x'}^{\beta'}u, D_{x_n}^t u)_{q|\beta'|+mt<k^*} = 0$, con $P(x, D)$ con simbolo come in (8), che $u \in H^p_{*, loc}(\Omega)$ con p opportunamente grande implica $u \in C^\infty(\Omega)$ (ipoellitticità C^∞), si veda Garello[2].

BIBLIOGRAFIA

[1] G. DE DONNO e L. RODINO, *Gevrey hypoellipticity for equations with involutive characteristics of higher multiplicity*, C. R. Acad. Bulg. Sci., **53 N7** (2000), 25-30.

[2] G. GARELLO, *Inhomogeneuos paramultiplication and microlocal singularities for semilinear equations*, Boll. Un. Mat. Ital., **(7) 10-B** (1996), 885-902.

[3] K. KAJITANI e S. WAKABAYASHI, *Hypoelliptic operators in Gevrey classes*, Recent developments in hyperbolic equations, Pitman (1988), 115-134.

[4] O. LIESS e L. RODINO, *Inhomogeneous Gevrey classes and related pseudo-differential operators*, Boll. Un. Mat. Ital., **(4) 3-C** (1984), 133-223.

[5] O. LIESS e L. RODINO, *Linear partial differential equations with multiple involutive characteristics*, Microlocal analysis and spectral theory, Kluwer (1997), 1-38.

Dipartimento di Matematica, Università di Pisa
e-mail: dedonno@dm.unito.it, dedonno@dm.unipi.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Pisa) - Ciclo XI
Direttore di ricerca: Prof. L. Rodino, Università di Torino