Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Maria Stella Fanciullo

Problemi di regolarità hölderiana per sistemi parabolici non variazionali

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.3, p. 335–338.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_3_335_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie 8, Vol. III-A, Dicembre 2000, 335-338

Problemi di regolarità hölderiana per sistemi parabolici non variazionali.

Maria Stella Fanciullo

Siano Ω un aperto limitato di R^n, di punto generico $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, T un numero reale positivo e Q il cilindro $\Omega \times (-T, 0)$. Detti X il punto (x, t) di $R^n_x \times R_t$ ed N un intero positivo, in Q si studia la regolarità hölderiana delle soluzioni e dei gradienti spaziali delle soluzioni di sistemi di N equazioni differenziali del secondo ordine non lineari non variazionali parabolici del tipo:

$$a(X, u, Du, H(u)) - \frac{\partial u}{\partial t} = b(X, u, Du), \tag{1}$$

dove l'operatore $a(X, u, p, \xi) : Q \times R^N \times R^{nN} \times R^{n^2 N} \to R^N$ è misurabile in X, continuo in (u, p, ξ) e soddisfa le condizioni:

$$a(X, u, p, 0) = 0, \tag{2}$$

(A) *esistono tre costanti positive α, γ e δ, con $\gamma + \delta < 1$, tali che,* $\forall u \in R^N$, $\forall p \in R^{nN}$, $\forall \tau, \xi \in R^{n^2 N}$ *e per q.o.* $X \in Q$, *risulta:*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \tau_{ii} - \alpha [a(X, u, p, \tau + \xi) - a(X, u, p, \xi)] \right\|^2 \leq \gamma \|\tau\|^2 + \delta \left\| \sum_{i=1}^{n} \tau_{ii} \right\|^2;$$

l'operatore $b(X, u, p) : Q \times R^N \times R^{nN} \to R^N$ è misurabile in X, continuo in (u, p) e soddisfa per q.o. $X \in Q$, $\forall u \in R^N$ e $\forall p \in R^{nN}$, la maggiorazione:

$$\|b(X, u, p)\| \leq c(f(X) + \|u\|^{\beta} + \|p\|^{\beta'}) \tag{3}$$

con $f \in L^2(Q)$, $1 \leq \beta < \frac{n+2}{n-2}$ e $1 \leq \beta' < \frac{n+2}{n}$.

Posto

$$W^2(Q, R^N) = \left\{ u : u \in L^2(-T, 0, H^2(\Omega, R^N)), \ \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(Q, R^N) \right\},$$

si dimostra che se u è soluzione in Q del sistema (1) (nel senso che $u \in W^2(Q, R^N)$ e soddisfa la (1) per q.o. $X \in Q$), allora u ed il suo gradiente spaziale, Du, sono hölderiani in Q.

La tecnica seguita è quella della regolarità negli spazi $\mathcal{L}^{2,\lambda}$. Quest'ultima teoria, nata nello studio delle equazioni lineari ellittiche nel 1965 con il lavoro di S. Campanato, *Equazioni ellittiche del II° ordine e spazi* $\mathcal{L}^{(2,\lambda)}$, Ann. Mat. Pura e Appl., 69 (1965), ha subito negli anni successivi miglioramenti e generalizzazioni che hanno permesso l'utilizzazione anche nel caso di sistemi ellittici e parabolici quasi-lineari e non lineari.

L'hölderianità "globale" in Q delle soluzioni del sistema e del loro gradiente spaziale è ottenuta per n "piccolo". La tecnica utilizzata consiste nel dedurre dalla regolarità L^q-locale delle soluzioni u del sistema (1) maggiorazioni fondamentali per la matrice hessiana $H(u)$, che assicurano l'appartenenza di $H(u)$ ad uno spazio di Morrey. Utilizzando, poi, diseguaglianze tipo Poincaré, si prova che u e Du appartengono ad opportuni spazi di Campanato, e quindi grazie all'isomorfismo tra gli spazi di Campanato $\mathcal{L}^{2,\lambda}$ e gli spazi $C^{0,\alpha}$, si ottiene la regolarità hölderiana in Q.

Come nel caso ellittico, non riuscendo ad ottenere la regolarità in tutto Q per qualsiasi valore di n, si è studiata ed ottenuta la hölderianità "parziale" in Q, cioè in Q privato di un insieme Q_0 chiuso in Q di misura di Lebesgue nulla.

Sia $u \in W^2(Q, R^N)$ una soluzione in Q del sistema (1). Grazie alla diseguaglianza di Caccioppoli:

$$\int_{Q(\sigma)} \left(\|H(u)\|^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 \right) dX \leqslant$$

$$\leqslant c\sigma^{-2} \left\{ \sigma^{-2} \int_{Q(2\sigma)} \|u - P_{Q(2\sigma)}\|^2 dX + \int_{Q(2\sigma)} \|D(u - P_{Q(2\sigma)})\|^2 dX \right\} +$$

$$+ c \int_{Q(2\sigma)} \|b(X, u, Du)\|^2 dX,$$

valida per ogni $Q(2\sigma) \subset\subset Q$, via Lemma di Gehring-Giaquinta -G. Modica, si prova il seguente risultato di regolarità:

LEMMA 1. – *Se* $u \in W^2(Q, R^N)$ *è una soluzione del sistema* (1), *se sono verificate le ipotesi* (2), (A) *e* (3) *e se* $f \in L^p(Q)$, *con* $p > 2$, *allora esiste* $\bar{q} \in (2, \bar{p}]$, $\bar{p} = \min\left\{ p, \frac{2(n+2)}{(n-2)\beta}, \frac{2(n+2)}{n\beta'} \right\}$, *tale che* $\forall q \in [2, \bar{q})$

$$u \in W^q_{loc}(Q, R^N)$$

e, $\forall Q(\sigma) \subset\subset Q$, *con* $\sigma < 2$, *e* $\cup \tau \in (0, 1)$ *risulta:*

$$\int_{Q(\tau\sigma)} \left(\|H(u)\|^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 \right) dX \leqslant \tag{4}$$

$$\leqslant c\tau^{(n+2)(1-1/q)} \left[(\|f\|^2_{L^p(Q)} + 1)\, \sigma^{(n+2)(1-1/p)} + \right.$$

$$\left. + \int_{Q(\sigma)} \left(\|u\|^{\frac{2(n+2)}{n-2}} + \|Du\|^{\frac{2(n+2)}{n}} + \|H(u)\|^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 \right) dX \right],$$

dove c *non dipende da* τ *e da* σ.

Dalla (4) segue che

$$H(u) \in L^{2,(n+2)(1-1/q)}_{loc}(Q, R^{n^2 N})$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^{2,(n+2)(1-1/q)}_{loc}(Q, R^N)$$

da cui, per le note diseguaglianze di Poincaré, si ha:

$$Du \in \mathcal{L}^{2,\, 2+(n+2)(1-1/q)}_{loc}(Q, R^{nN})$$

e

$$u \in \mathcal{L}^{2,\, 4+(n+2)(1-1/q)}_{loc}(Q, R^N)$$

per ogni $q \in (2, \overline{q})$. Utilizzando infine il teorema di isomorfismo tra gli spazi di Campanato e gli spazi $C^{0,\alpha}$, si ottiene il seguente risultato di hölderianità globale.

TEOREMA 1. – *Se* $u \in W^2(Q, R^N)$ *è una soluzione del sistema* (1), *se sono verificate le ipotesi* (2), (A) *e* (3) *e se* $f \in L^p(Q)$, *con* $p > 2$, *allora*

$$u \text{ è hölderiano in } Q \text{ se } n < 2\,\overline{q} - 2,$$

in particolare se $n = 2$.

La tecnica illustrata consente di provare anche risultati di regolarità globale per $n > 2$ e per sistemi quasibase ad andamento lineare ($\beta = \beta' = 1$):

$$a(X, H(u)) - \frac{\partial u}{\partial t} = b(X, u, Du). \tag{5}$$

Vale il seguente

TEOREMA 2. – *Se* $u \in W^2(Q, R^N)$ *è una soluzione del sistema* (5), *e se l'operatore* $b(X, u, p)$ *soddisfa, per q.o.* $X \in Q$, $\forall u \in R^N$ *e* $\forall p \in R^{nN}$, *la condizione:*

$$\|b(X, u, p)\| \leq c(1 + \|u\| + \|p\|),$$

allora esiste $q^* > 2$ *tale che*

$$Du \text{ è hölderiano in } Q \text{ se } n < 2q^* - 2,$$

in particolare se $n = 2$, *e*

$$u \text{ è hölderiano in } Q \text{ se } n < 3q^* - 2,$$

in particolare se $n \leq 4$.

Questi ultimi risultati sono raccolti in [2].

In [3] è data la regolarità hölderiana in Q delle soluzioni dei sistemi base omogenei e del loro gradiente rispettivamente per $n \leq 6$ e $n \leq 4$. Analoghi risultati valgono anche per sistemi base non omogenei. Rimane aperto il problema della hölderianità globale per $n \leqslant 6$ e per i sistemi quasibase.

Sulla hölderianità parziale è stato dimostrato, facendo uso di una tecnica simile a quella utilizzata in [1], il seguente:

TEOREMA 3. – *Sia* $u \in W^2(Q, R^N)$ *una soluzione in* Q *del sistema* (1). *Se* $n > 2$, *se sono soddisfatte le ipotesi* (2), (A) *e* (3), *se* $f \in L^p(Q)$, *con* $p > n + 2$, *e se esiste una funzione positiva, continua, limitata e concava* $\omega(t)$, *definita per* $t \geqslant 0$, $\omega(0) = 0$, *tale che* $\forall X, Y \in Q$, $\forall u, v \in R^N$, $\forall p, q \in R^{nN}$ *e* $\forall \xi, \tau \in R^{n^2 N}$:

$$\|a(X, u, p, \xi) - a(Y, v, q, \xi)\| \leqslant \omega(d^2(X, Y) + \|u - v\|^2 + \|p - q\|^2)\|\xi\|$$

e

$$\left\| \frac{\partial a(X, u, p, \xi)}{\partial \xi} - \frac{\partial a(X, u, p, \tau)}{\partial \xi} \right\| \leqslant \omega(\|\xi - \tau\|^2),$$

allora esiste un insieme Q_0, *chiuso in* Q, *di misura nulla, tale che*

$$Du \text{ è } \alpha\text{-hölderiano in } Q \backslash Q_0, \qquad \forall \alpha < 1 - \frac{n+2}{p},$$

e

$$u \text{ è } \gamma\text{-hölderiano in } Q \backslash Q_0, \qquad \forall \gamma < 1.$$

BIBLIOGRAFIA

[1] FM.S. FANCIULLO, *Partial Hölder continuity for second order non linear non variational parabolic systems with controlled growth*, Le Matematiche, **52** (1997), 199-215.
[2] M.S. FANCIULLO, *Hölder continuity for second order non variational parabolic systems*, Le Matematiche, **53** (1998), 375-385.
[3] M. MARINO - A. MAUGERI - J. NAUMANN, *New results of Hölder continuity for non variational basic parabolic systems*, Ricerche di Matematica, **48-Suppl.** (1999), 259-276.

Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Catania
e-mail: fanciullo@dmi.unict.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Messina) - Ciclo XI
Direttore di ricerca: Prof. Mario Marino, Università di Catania.