BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

*Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura*

CLAUDIA LANDI

# Anelli di coomologia dei gruppi di Artin

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8*, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.3, p. 355–358.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_3_355_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie 8, Vol. III-A, Dicembre 2000, 355-358

# Anelli di coomologia dei gruppi di Artin.

CLAUDIA LANDI

## 1 – Introduzione.

L'argomento principale della tesi è il problema della determinazione degli anelli di coomologia dei gruppi di Artin.

I *gruppi di Artin* possono essere definiti come segue. Sia $W$ un gruppo di Coxeter finito, realizzato come un gruppo di riflessioni in $\mathbb{R}^n$. Il gruppo di Artin $G_W$ di tipo $W$ è il gruppo fondamentale dello spazio delle orbite

$$Y/W = \Big(\mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H\Big)/W$$

dove $\mathcal{A}$ è l' *arrangiamento* degli iperpiani di riflessione complessificati e l'azione di $W$ sul complementare è quella ovvia. Per esempio, quando $W$ è il gruppo simmetrico $\mathcal{S}_n$, allora $G_W$ risulta essere il gruppo delle trecce classico $Br(n)$ ([5]).

Ricordiamo che il problema di determinare la struttura additiva della coomologia di un gruppo con un dato modulo di coefficienti può essere trasformato nel problema di studiare la coomologia topologica del suo spazio classificante con coefficienti in un sistema di gruppi locali (che è il corrispondente topologico del modulo di coefficienti algebrici).

Nel caso dei gruppi di Artin è un fatto noto che se $W$ è finito allora $Y/W$ è $K(\pi, 1)$ ([1]). In [4] lo spazio classificante di $G_W$ è descritto in termini di un esplicito *complesso cellulare* costruito come segue: si parte dal complesso cellulare $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ duale della stratificazione in faccette $\mathcal{S}$ associata agli iperpiani di riflessione di $W$. Poi si fissa una camera $C_0$ di $\mathcal{S}$. Sia $v_0$ il vertice di $Q$ contenuto in $C_0$. Sia anche $\mathcal{S}_0$ il sistema di faccette contenute nella chiusura di $C_0$ e sia $Q_0$ l'insieme delle celle in $Q$ duali alle faccette di $\mathcal{S}_0$. È noto che per ogni faccetta $F$ in $\mathcal{S}$ esiste esattamente una faccetta $F_0$ in $\mathcal{S}_0$ nella stessa $W$-orbita di $F$. Dualmente, per ogni cella $e$ in $Q$ c'è esattamente una cella $e^0 \in Q_0$ nella stessa $W$-orbita di $e$. Gli elementi $\gamma \in W$ tali che $\gamma(e^0) = e$ descrivono una classe laterale sinistra dello stabilizzatore $W_{F_0}$ della faccetta $F_0$ duale di $e^0$. Esiste uno ed un solo $\gamma_{(e)}$ di lunghezza minima (nel sistema di Coxeter associato a $C_0$) tale che $\gamma_{(e)}^{-1}(e) \cap C_0 \neq \emptyset$.

TEOREMA 1. – ([4]) *$Y/W$ ha lo stesso tipo di omotopia del complesso cellulare $X_W$ ottenuto da $Q$ identificando due celle $e, e'$ di $Q$ se e solo se stanno nella stessa $W$-orbita, per mezzo dell'omeomorfismo indotto da $\gamma_{(e')}\gamma_{(e)}^{-1}$.*

Questo risultato viene usato in [4] per produrre un complesso algebrico con il quale calcolare la struttura additiva della coomologia dei gruppi di Artin (per una generalizzazione si veda anche [2]).

Nella tesi ho completamente determinato la struttura di anello della coomologia a coefficienti interi per tutti i gruppi di Artin associati ai gruppi di Coxeter eccezionali utilizzando il complesso cellulare $X_W$ e un metodo effettivo per il calcolo del prodotto cup sui complessi con identificazioni ([3]).

## 2 – Il prodotto cup sui complessi con identificazioni.

Lo strumento principale da me utilizzato è un metodo effettivo per calcolare il *prodotto cup* su una classe di complessi cellulari ottenuti come «varietà con identificazioni».

Ricordiamo che il prodotto cup è definito come la composizione del prodotto cross con l'omomorfismo indotto da una approsimazione cellulare della mappa diagonale. Nel caso di complessi cellulari arbitrari non sembra essere nota una formula generale per il calcolo della approssimazione diagonale (mentre per i complessi simpliciali si può usare la ben nota mappa di approssimazione diagonale di Alexander-Whitney). Pertanto vi è l'esigenza di un metodo efficace per il calcolo del prodotto cup in coomologia cellulare. Nella tesi propongo un approccio a questo problema per i complessi cellulari conidentificazioni, basato sulla intersezione di celle trasverse, generalizzando così il metodo classico per calcolare i prodotti cup sulle varietà. Tale generalizzazione è naturale ma non ovvia e può essere vista come un passo verso il probema più generale di calcolare il prodotto cup in coomologia cellulare.

Più precisamente, sia $K$ un complesso cellulare regolare finito realizzato geometricamente da una varietà compatta, connessa e orientabile, eventualmente con bordo. Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di identificazioni che agisce sulle celle di $K$. Il complesso $K/\mathcal{F}$ non è necessariamente realizzato da una varietà. Consideriamo una triangolazione $\mathcal{F}$-equivariante $\widetilde{T}(K)$ di $K$ in posizione generale rispetto a una fissata decomposizione $\mathcal{D}(K)$ in blocchi duali di $K$. Poi definiamo l'indice di intersezione tra simplessi di $\widetilde{T}(K)$ e blocchi di $\mathcal{D}(K)$. Per mezzo di questo indice di intersezione stabiliamo un omomorfismo esplicito $\phi_T$ dal complesso di cocatene di $K/\mathcal{F}$ in quello di $\widetilde{T}(K)/\mathcal{F}$. Più precisamente $\phi_T$ è l'inverso dell'isomorfismo naturale $T$ indotto dalla triangolazione $\widetilde{T}$ e pertanto induce un isomorfismo di anelli in coomologia. Abbiamo dunque delle formule esplicite che ci permettono di passare dall'anello di coomologia di $K/\mathcal{F}$ a quello di $\widetilde{T}(K)/\mathcal{F}$ e viceversa. D'altra parte su $\widetilde{T}(K)/\mathcal{F}$ i prodotti cup possono essere facilmente calcolati usando la formula di Alexander-Whitney.

Rendendo espliciti i calcoli per il caso in cui $\widetilde{T}(K)$ è una suddivisione baricentrica, otteniamo la seguente formula per il prodotto cup su $K/\mathcal{F}$.

TEOREMA 2. – ([3]) *Sia $K$ un complesso cellulare regolare finito, realizzato geometricamente da una varietà compatta connessa orientabile eventualmente* *con bordo. Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di identificazioni su $K$ e assumiamo che $K$ sia orientata in modo che gli omeomorfismi in $\mathcal{F}$ conservino l'orientazione delle celle.*

*Inoltre, siano $Sd(K)$ e $\tilde{T}(K)$ suddivisioni baricentriche di $K$, con $\tilde{T}(K)$ trasversa alla decomposizione in blocchi duali indotta da $Sd(K)$. Supponiamo che $\tilde{T}(K)$ e $Sd(K)$ siano $\mathcal{F}$-equivarianti. Allora prese $\underline{e}_p, \underline{e}_q, \underline{e}_r \in K/\mathcal{F}$ con $p+q=r$, vale che*

$$\langle T^{p+q}(\phi_T(\check{\underline{e}}_p) \cup \phi_T(\check{\underline{e}}_q)), \underline{e}_r \rangle = \sum_{e_p \in \underline{e}_p} \sum_{e_q \in \underline{e}_q} (D_{|e_r} e_p \cdot \widetilde{D}_{|e_r} e_q)$$

*dove $e_r \in \underline{e}_r$, $D_{|e_r} e_p$ è il blocco duale a $e_p$ relativo a $|\bar{e}_r|$ associato a $Sd(K)$, $\widetilde{D}_{|e_r} e_q$ è il blocco duale a $e_q$ relativo a $|\bar{e}_r|$ associato a $\tilde{T}(K)$ e il simbolo $\check{}$ denota l'omomorfismo duale.*

## 3 – Prodotto cup per la coomologia dei gruppi di Artin.

Il complesso cellulare $X_W$ è del tipo $K/\mathcal{F}$ con $K = Q$ e $\mathcal{F} = \{\gamma_{(e)}\}_{e \in Q}$. Osserviamo che per costruzione i blocchi duali delle celle di $Q$ non sono altro che le faccette di $\mathcal{S}$, cioè semispazi lineari. Da tali osservazioni e dal Teorema 2 si deduce che il calcolo del prodotto cup per i gruppi di Artin di tipo finito è riconducibile alla risoluzione di sistemi di equazioni e disequazioni lineari che dipendono dalla combinatorica del gruppo di riflessioni $W$. Pertanto il teorema precedente permette l'implementazione di un algoritmo per il calcolo del prodotto cup per ogni gruppo di Artin associato a un gruppo di riflessioni finito. In particolare siamo così in grado di esibire una presentazione per gli anelli di coomologia intera dei gruppi di Artin per i gruppi eccezionali. I calcoli sono stati eseguiti in parte a mano, in parte con l'uso di un computer.

## 4 – Generalizzazione alla coomologia a coefficienti locali.

Un ulteriore problema studiato nella tesi è quello di definire il prodotto cup in coomologia a coefficienti locali così che anche la struttura moltiplicativa della coomologia dei gruppi possa essere studiata da una punto di vista topologico.

Analogamente a quanto avviene per la coomologia a coefficienti costanti, il prodotto cup a coefficienti locali viene definito nella tesi per mezzo dell'approssimazione diagonale e del prodotto cross. Allora, con le opportune modifiche, i ragionamenti fatti per dimostrare il Teorema  portano a una formula analoga per il calcolo effettivo del prodotto cup in coomologia cellulare con coefficienti locali.

Risulta interessante considerare la struttura di anello di certe *algebre di coomologia twistata* che sono associate in modo naturale con $G_W$. Consideriamo la seguente famiglia di $G_W$-moduli non banali. Sia $R$ un anello commutativo con 1 e $R[q, q^{-1}]$ l'anello dei polinomi di Laurent su $R$ in una variabile $q$. Per ogni gruppo di Artin $G_W$ consideriamo $R[q, q^{-1}]$ come $G_W$-modulo, denotato $R_{q^i}$, definito mappando ciascun generatore standard $g$ di $G_W$ nella moltiplcazione per $q^i$, $i \geq 0$. La somma diretta di tutte le coomologie di un gruppo di Artin a coefficienti in questa famiglia di moduli,

$$\mathcal{A}_W \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{\substack{i \geq 0 \\ p \geq 0}} H^p(G_W, R_{q^i})$$

può essere dotata di una struttura di anello per mezzo del prodotto cup a coefficienti locali. In questa situazione il prodotto cup su $\mathcal{A}_W$ può essere calcolato utilizzando la formula menzionata. Ho determinato tale anello per i gruppi di Artin associati a $\mathbf{A}_n$, $\mathbf{I}_2(p)$, $\mathbf{H}_3$, $\mathbf{H}_4$.

## 5 – Conclusioni.

Il risultato principale della tesi è un metodo effettivo per il calcolo del prodotto cup per i complessi cellulari con identificazioni che risulta particolarmente efficace nel caso dei gruppi di Artin di tipo finito. Tale metodo sembra essere promettente anche per trattare il problema di determinare gli anelli di coomologia nei casi di gruppi di Artin non di tipo finito ma per i quali continui a valere che $Y/W$ è $K(\pi, 1)$.

Inoltre può essere interessante considerare la formula del cup product per i coefficienti locali in modo da calcolare la «lunghezza coomologica twistata» degli spazi classificanti.

Questi problemi saranno l'oggetto di prossime ricerche.

## BIBLIOGRAFIA

[1] Deligne P., *Les immeubles des groupes de tresses généralisés,* Inv. Math., **17** (1972), 273-302.

[2] De Concini C. e Salvetti M., *Cohomology of Artin groups,* Math. Res. Letters, **3** (1996), 293-297.

[3] Landi C., *Cohomology rings of Artin groups*, in corso di pubblicazione su Rend. Mat. Acc. Lincei.

[4] Salvetti M., *The homotopy type of Artin groups,* Math. Res. Letters, **1** (1994), 565-577.

[5] Vassiliev V.A., *Complements of discriminants of smooth maps,* Trans. of Math. Monog., AMS, **98** (1992).

Dipartimento di Matematica, Università di Pisa
e-mail: landi@mail.dm.unipi.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Pisa)-Ciclo X
Direttore di ricerca: Prof. Mario Salvetti, Università di Pisa