Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Michele Lattarulo

Il problema di Schottky per curve reali

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.3, p. 359–362.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_3_359_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie 8, Vol. III-A, Dicembre 2000, 359-362

Il problema di Schottky per curve reali.

MICHELE LATTARULO

1 – Introduzione.

Un celebre problema di geometria algebrica è il «problema di Schottky» per le curve complesse, che consiste nel caratterizzare le jacobiane delle curve complesse, fra tutte le varietà abeliane complesse principalmente polarizzate. Noi consideriamo un problema analogo per le curve reali; prima di enunciarlo, riteniamo opportuno richiamare alcune nozioni di geometria reale, rimandando, per i dettagli, a [2] e [5].

1.1. *Curve reali.* – Una curva reale viene usualmente definita mediante un sistema di equazioni polinomiali a coefficienti reali. È però possibile pensare una curva reale anche come una coppia $X = (Y, \sigma)$, ove Y è una curva complessa e σ è un'involuzione antiolomorfa di Y («antiolomorfa» significa che la composizione di σ con il coniugio è olomorfa): spesso questa impostazione permette di ricavare proprietà delle curve reali a partire da proprietà già note delle curve complesse.

In questo contesto il tipo topologico di X è la terna (g, ν, ε), ove g è il genere di Y, ν è il numero di componenti connesse di Y^σ (luogo dei punti fissi di σ), ed ε è il numero di componenti connesse di $Y - Y^\sigma$. Non tutte le terne (g, ν, ε) sono tipi topologici di curve reali: ad esempio, si ha la nota restrizione di Harnack $\nu \leqslant g+1$.

Due curve reali $X_1 = (Y_1, \sigma_1)$, $X_2 = (Y_2, \sigma_2)$ sono isomorfe se esiste un isomorfismo $\varphi : Y_1 \to Y_2$ tale che $\varphi \circ \sigma_1 = \sigma_2 \circ \varphi$. L'insieme delle classi di isomorfismo delle curve reali di genere g (risp. di tipo (g, ν, ε)) si denota con $\mathcal{M}^g_{\mathbf{R}}$ (risp. $\mathcal{M}^{(g,\nu,\varepsilon)}_{\mathbf{R}}$).

1.2. *V.a.p.p. reali.* – Una varietà abeliana principalmente polarizzata (in breve v.a.p.p.) reale è una coppia $\mathcal{X} = (\mathcal{Y}, \Sigma)$, ove $\mathcal{Y}$ è una v.a.p.p. complessa e Σ è un'involuzione antiolomorfa di $\mathcal{Y}$ tale che $\Sigma(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$, avendo indicato con $\mathcal{O}$ il divisore ampio che definisce la polarizzazione di $\mathcal{Y}$ (in altre parole si richiede che siano reali sia la varietà abeliana che la polarizzazione).

La nozione di isomorfismo fra v.a.p.p. reali è analoga a quella di isomorfismo fra curve reali. L'insieme delle classi di isomorfismo delle v.a.p.p. reali di dimensione g si denota con $\mathcal{A}^g_{\mathbf{R}}$.

È noto che ad ogni matrice $Z \in M(g, \mathbf{C})$ tale che $Z = Z^T$ e $\operatorname{Im} Z > 0$ è possibile associare una v.a.p.p. complessa. Se Z soddisfa l'ulteriore condizione $2 \operatorname{Re} Z \in M(g, \mathbf{Z})$ è possibile associare a Z, in modo analogo, una v.a.p.p. reale $\mathcal{X}$ e quindi un punto di $\mathcal{A}^g_{\mathbf{R}}$, che si denota con $[Z]_{\mathbf{R}}$.

1.3. *Jacobiane di curve reali.* – Se $X = (Y, \sigma)$ è una curva reale e $\mathcal{Y}$ è la jacobiana della curva complessa Y, allora σ induce in modo naturale un'involuzione antiolomorfa Σ su $\mathcal{Y}$. La v.a.p.p. reale $\mathcal{X} = (\mathcal{Y}, \Sigma)$ è detta la jacobiana (reale) di X. Se $\mathcal{X} = [Z]_{\mathbf{R}}$, Z è detta una matrice dei periodi (reale) di X.

1.4. *La mappa di Torelli reale.* – Associando alla classe d'isomorfismo di una curva reale di genere g la classe d'isomorfismo della sua jacobiana (che è una v.a.p.p. reale di dimensione g), si ottiene la mappa di Torelli reale $\mathfrak{J}^g_{\mathbf{R}} : \mathcal{M}^g_{\mathbf{R}} \to \mathcal{A}^g_{\mathbf{R}}$.

Il problema di Schottky reale consiste nel determinare, per ogni g, *l'immagine della mappa di Torelli reale* $\mathfrak{J}^g_{\mathbf{R}}$, *cioè nel caratterizzare le jacobiane delle curve reali, fra tutte le v.a.p.p. reali.*

2. – Differenze fra il caso reale ed il caso complesso.

Ci sembra opportuno evidenziare, nella seguente tabella e nelle successive osservazioni, le principali differenze che sussistono fra il caso reale ed il caso complesso. Denotiamo con $\mathcal{M}^{g,h}_{\mathbf{R}}$ l'insieme delle classi d'isomorfismo delle curve reali iperellittiche di genere g e con $(\mathcal{A}^g_{\mathbf{R}})_{nd}$ l'insieme dei punti di $\mathcal{A}^g_{\mathbf{R}}$ che non possono essere rappresentati mediante matrici diagonali a blocchi. Per il caso complesso utilizziamo notazioni analoghe a quelle fin qui introdotte per il caso reale.

genere	0	1	2	3	$g \geqslant 4$
# comp. conn. $\mathcal{M}^g_{\mathbf{C}}$	1	1	1	1	1
# comp. conn. $\mathcal{M}^g_{\mathbf{R}}$	2	3	5	6	$\left[\frac{3g+4}{2}\right]$
dim $\mathcal{M}^g_{\mathbf{C}}$ = dim $\mathcal{M}^g_{\mathbf{R}}$	0	1	3	6	$3g-3$
# comp. conn. $\mathcal{M}^{g,\mathrm{h}}_{\mathbf{C}}$	1	1	1	1	1
# comp. conn. $\mathcal{M}^{g,\mathrm{h}}_{\mathbf{R}}$	2	3	5	6	$g+3$
dim $\mathcal{M}^{g,\mathrm{h}}_{\mathbf{C}}$ = dim $\mathcal{M}^{g,\mathrm{h}}_{\mathbf{R}}$	0	1	3	5	$2g-1$
# comp. conn. $\mathcal{A}^g_{\mathbf{C}}$	1	1	1	1	1
# comp. conn. $\mathcal{A}^g_{\mathbf{R}}$	1	2	4	5	$\left[\frac{3g+4}{2}\right]-1$
dim $\mathcal{A}^g_{\mathbf{C}}$ = dim $\mathcal{A}^g_{\mathbf{R}}$	0	1	3	6	$\frac{g(g+1)}{2}$
$\overline{\mathfrak{J}^g_{\mathbf{C}}(\mathcal{M}^g_{\mathbf{C}})}$	$=\mathcal{A}^0_{\mathbf{C}}$	$=\mathcal{A}^1_{\mathbf{C}}$	$=\mathcal{A}^2_{\mathbf{C}}$	$=\mathcal{A}^3_{\mathbf{C}}$	$\neq\mathcal{A}^g_{\mathbf{C}}$
$\overline{\mathfrak{J}^g_{\mathbf{R}}(\mathcal{M}^g_{\mathbf{R}})}$	$=\mathcal{A}^0_{\mathbf{R}}$	$=\mathcal{A}^1_{\mathbf{R}}$	$=\mathcal{A}^2_{\mathbf{R}}$	$\neq\mathcal{A}^3_{\mathbf{R}}$	$\neq\mathcal{A}^g_{\mathbf{R}}$
$\mathfrak{J}^g_{\mathbf{C}}(\mathcal{M}^g_{\mathbf{C}})$	$=\mathcal{A}^0_{\mathbf{C}}$	$=\mathcal{A}^1_{\mathbf{C}}$	$=(\mathcal{A}^2_{\mathbf{C}})_{\mathrm{nd}}$	$=(\mathcal{A}^3_{\mathbf{C}})_{\mathrm{nd}}$	$\neq(\mathcal{A}^g_{\mathbf{C}})_{\mathrm{nd}}$
$\mathfrak{J}^g_{\mathbf{R}}(\mathcal{M}^g_{\mathbf{R}})$	$=\mathcal{A}^0_{\mathbf{R}}$	$=\mathcal{A}^1_{\mathbf{R}}$	$\neq(\mathcal{A}^2_{\mathbf{R}})_{\mathrm{nd}}$	$\neq(\mathcal{A}^3_{\mathbf{R}})_{\mathrm{nd}}$	$\neq(\mathcal{A}^g_{\mathbf{R}})_{\mathrm{nd}}$

- Per prima cosa osserviamo che $\mathcal{M}^g_{\mathbf{R}}$ non è un sottoinsieme di $\mathcal{M}^g_{\mathbf{C}}$ (in particolare $\mathcal{M}^g_{\mathbf{R}}$ non è la parte reale di $\mathcal{M}^g_{\mathbf{C}}$), così come $\mathcal{A}^g_{\mathbf{R}}$ non è un sottoinsieme di $\mathcal{A}^g_{\mathbf{C}}$. Pertanto $\mathfrak{J}^g_{\mathbf{R}}$ non è una restrizione di $\mathfrak{J}^g_{\mathbf{C}}$, ed il problema di Schottky reale non è un caso particolare del problema di Schottky complesso.
- Seppälä ha provato che $\mathcal{M}^g_{\mathbf{R}}$ è uno spazio analitico reale non compatto, non connesso, la cui dimensione reale coincide con la dimensione complessa di $\mathcal{M}^g_{\mathbf{C}}$; egli ha

inoltre costruito uno spazio topologico di Hausdorff compatto e connesso $\overline{\mathcal{M}_{\mathbf{R}}^g}$ di cui $\mathcal{M}_{\mathbf{R}}^g$ è un sottospazio denso. Silhol ha provato analoghe proprietà per $\mathcal{A}_{\mathbf{R}}^g$.

- Pertanto, a differenza del caso complesso, $\mathcal{M}_{\mathbf{R}}^g$ e $\mathcal{A}_{\mathbf{R}}^g$ non sono connessi. Più precisamente, le componenti connesse di $\mathcal{M}_{\mathbf{R}}^g$ sono gli insiemi $\mathcal{M}_{\mathbf{R}}^{(g,\,\nu,\,\varepsilon)}$, mentre lo spazio $\mathcal{A}_{\mathbf{R}}^g$ ha una componente in meno rispetto a $\mathcal{M}_{\mathbf{R}}^g$: ad ogni componente $\mathcal{M}_{\mathbf{R}}^{(g,\,\nu,\,\varepsilon)}$, con $\nu \neq 0$, corrisponde la componente $\mathcal{A}_{\mathbf{R}}^{(g,\,\nu,\,\varepsilon)}$ di $\mathcal{A}_{\mathbf{R}}^g$, che contiene le jacobiane delle curve di tipo $(g,\,\nu,\,\varepsilon)$; le jacobiane delle curve con $\nu = 0$ sono invece contenute nella componente $\mathcal{A}_{\mathbf{R}}^{(g,\,1,\,2)}$ se g è pari e nella componente $\mathcal{A}_{\mathbf{R}}^{(g,\,2,\,2)}$ se g è dispari.
- La mappa $\mathcal{J}_{\mathbf{C}}^g$ è iniettiva per ogni g, per un noto teorema di Torelli, mentre la mappa $\mathcal{J}_{\mathbf{R}}^g$ è iniettiva solo se $g \geq 2$ (cfr. [5]).
- Se $g = 0$ o $g = 1$, la mappa $\mathcal{J}_{\mathbf{R}}^g$ è surgettiva, come nel caso complesso.
- Se $g = 2$, $\mathcal{J}_{\mathbf{R}}^2(\mathcal{M}_{\mathbf{R}}^2)$ è densa in $\mathcal{A}_{\mathbf{R}}^2$, come nel caso complesso. Però, mentre nel caso complesso $\mathcal{J}_{\mathbf{C}}^2(\mathcal{M}_{\mathbf{C}}^2)$ coincide con l'insieme dei punti di $\mathcal{A}_{\mathbf{C}}^2$ che non possono essere rappresentati mediante matrici diagonali, ciò cessa di essere vero nel caso reale.
- Se $g = 3$, contrariamente al caso complesso, e sebbene le dimensioni di $\mathcal{M}_{\mathbf{R}}^3$ e $\mathcal{A}_{\mathbf{R}}^3$ coincidano, $\mathcal{J}_{\mathbf{R}}^3(\mathcal{M}_{\mathbf{R}}^3)$ non è densa in $\mathcal{A}_{\mathbf{R}}^3$.

3. – Il caso delle curve reali di genere 2.

Un caso che abbiamo studiato dettagliatamente è quello delle curve reali di genere 2; in particolare abbiamo provato che:

$$\mathcal{A}_{\mathbf{R}}^{(2,\,\nu,\,\varepsilon)} \cap \mathcal{J}_{\mathbf{R}}^2(\mathcal{M}_{\mathbf{R}}^2) = \begin{cases} \mathcal{A}_{\mathbf{R}}^{(2,\,\nu,\,\varepsilon)} - \{[Z]_{\mathbf{R}} \colon Z \text{ è diagonale}\} & \text{se } (\nu,\,\varepsilon) \neq (1,\,2) \\ \mathcal{A}_{\mathbf{R}}^{(2,\,\nu,\,\varepsilon)} - \left\{[Z]_{\mathbf{R}} \colon \det \operatorname{Im} Z \neq \dfrac{1}{4}\right\} & \text{se } (\nu,\,\varepsilon) = (1,\,2). \end{cases}$$

Si osservi che per le componenti $\mathcal{A}_{\mathbf{R}}^{(2,\,\nu,\,\varepsilon)}$, con $(\nu,\,\varepsilon) \neq (1,\,2)$, la caratterizzazione è analoga a quella che si ha nel caso complesso, mentre per la componente $\mathcal{A}_{\mathbf{R}}^{(2,\,1,\,2)}$ è completamente differente. Nella tesi abbiamo dimostrato altri risultati, che per ragioni di spazio non possono essere enunciati in queste pagine:

– una descrizione esplicita di $\mathcal{J}_{\mathbf{R}}^2(\mathcal{M}_{\mathbf{R}}^2)$ come sottoinsieme semialgebrico di $\mathbf{R}^3$;
– la caratterizzazione delle matrici dei periodi delle curve reali di genere 2;
– un legame esplicito fra l'equazione che definisce una curva reale di genere 2 e gli elementi di una sua matrice dei periodi.

4 – Il caso delle curve reali iperellittiche.

Un altro caso che abbiamo considerato è quello delle curve reali iperellittiche. Dopo aver provato alcuni semplici risultati sulla topologia di tali curve, abbiamo mostrato che $\mathcal{J}_{\mathbf{R}}^g(\mathcal{M}_{\mathbf{R}}^{g,\,h})$ può essere caratterizzata nel seguente modo:

$$\mathcal{A}_{\mathbf{R}}^{(g,\,\nu,\,\varepsilon)} \cap \mathcal{J}_{\mathbf{R}}^g(\mathcal{M}_{\mathbf{R}}^{g,\,h}) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } \varepsilon = 2 \text{ e } 3 \leq \nu \leq g \\ \left\{[Z]_{\mathbf{R}} \in \mathcal{A}_{\mathbf{R}}^{(g,\,\nu,\,\varepsilon)} \colon n_Z = \dfrac{(2g+2)!}{2(g+1)!^2}\right\} & \text{negli altri casi} \end{cases}$$

ove n_Z è il numero di theta-caratteristiche non nulle della matrice Z, cioè il numero di coppie $(a, b) \in \mathbf{Z}_2^{2g}$ tali che:

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}^g} e^{\pi i \langle n + a,\, Z(n+a) + 2b \rangle} \neq 0$$

5 – Il caso generale.

Per quanto riguarda il caso generale, abbiamo mostrato, con opportuni esempi, che per ogni $g \geqslant 3$ si ha:

$$\mathcal{J}_{\mathbf{R}}^g(\mathcal{M}_{\mathbf{R}}^g) \neq \left\{ \mathcal{X} = (\mathcal{Y}, \Sigma) \in \mathcal{A}_{\mathbf{R}}^g : \mathcal{Y} \in \mathcal{J}_{\mathbf{C}}^g(\mathcal{M}_{\mathbf{C}}^g) \right\}$$

(si noti la differenza con il caso iperellittico, in cui i due insiemi coincidono).

Abbiamo infine osservato che la caratterizzazione «$\det \operatorname{Im} Z \neq \frac{1}{4}$», relativa ad una delle componenti di $\mathcal{A}_{\mathbf{R}}^2$, si generalizza, in dimensione superiore, solo in una condizione necessaria.

6 – Conclusioni.

In questa nota abbiamo presentato il problema da noi studiato nella tesi di dottorato ed alcuni dei risultati ottenuti. Il nostro punto di partenza è stato l'articolo [2], in cui veniva segnalato, come problema aperto, lo studio dell'immagine della mappa di Torelli reale, essendo nota solo una caratterizzazione di Comessatti [3] delle matrici dei periodi delle curve reali di genere 2 prive di punti di diramazione reali.

Segnaliamo che, per quanto riguarda il caso delle curve reali di genere 2, un risultato analogo ad uno di quelli da noi esposti nella tesi è stato indipendentemente ottenuto in [1], con metodi differenti. Citiamo infine l'articolo [4], in cui viene trattato un problema differente da quello da noi studiato, ma ad esso legato (la caratterizzazione delle soluzioni reali delle cosiddette «equazioni differenziali KP»).

BIBLIOGRAFIA

[1] J. Bochnak, W. Kucharz, R. Silhol, *Morphism, line bundles and moduli spaces in real algebraic geometry,* Publ. Math. I.H.E.S., **86** (1997), 5-65.

[2] C. Ciliberto, C. Pedrini, *Real abelian varieties and real algebraic curves,* Lectures in Real Geometry, W. de Gruyter, Berlin (1996), 167-256.

[3] A. Comessatti, *Sulle varietà abeliane reali,* Ann. Mat. Pura Appl., **2** (1924), 67-106.

[4] B.A. Dubrovin, S. Natanzon, *Real Theta function solutions of the Kadomtsev Petviashvili equation,* Math. USSR Izvestiya, **32** (1989), 269-288.

[5] M. Seppälä, R. Silhol, *Moduli Spaces for Real Algebraic Curves and Real Abelian Varieties,* Math. Z., **201** (1989), 151-165.

Dipartimento di Matematica, Università di Genova
e-mail: lattarul@dima.unige.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Università di Torino) - Ciclo X
Direttore di ricerca: Prof. Claudio Pedrini, Università di Genova