BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

*Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura*

MARIA FLAVIA MAMMANA

# Immersione di sistemi parziali di m-cicli

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8*, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.3, p. 367–370.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_3_367_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie 8, Vol. III-A, Dicembre 2000, 367-370

# Immersione di sistemi parziali di m-cicli.

Maria Flavia Mammana

Assegnati due grafi G ed H si dice G-decomposizione di H una partizione dell'insieme degli spigoli di H in grafi tutti isomorfi a G. Se $G \equiv K_3$ e $H \equiv K_n$ si ha un sistema di terne di Steiner.

Un sistema parziale di terne di Steiner di ordine n è una coppia (X, $P$), dove $P$ è una collezione di terne a due a due disgiunte dell'insieme degli spigoli del grafo completo $K_n$, definito su X. La differenza tra un sistema di terne di Steiner ed un sistema parziale di terne di Steiner è che le terne di un sistema parziale non costituiscono necessariamente una partizione dell'insieme degli spigoli di $K_n$. Assegnato un sistema parziale di terne di Steiner di ordine n non è sempre possibile decomporre $E(K_n)\setminus E(P)$ in terne a due a due disgiunte (dove $E(K_n)$ ed $E(P)$ indicano rispetivamente l'insieme degli spigoli di $K_n$ e l'insieme degli spigoli contenuti nelle terne di $P$). È però possibile completare $P$ a una collezione di terne che individua una partizione di $K_t$, con $t \geq n$, cioè immergere un sistema parziale di terne di Steiner in un sistema di terne di Steiner. Precisamente un sistema parziale di terne di Steiner $(X, P)$ di ordine n si dice immerso nel sistema di terne di Steiner $(S, B)$ di ordine t se $X \subseteq S$ e $P \subseteq B$.

Tale problema è stato risolto da C. Treash che nel 1971 ha provato che un sistema parziale di terne di Steiner di ordine n si può immergere in un sistema di terne di Steiner di ordine $< 2^{2n}$.

Questo risultato è stato generalizzato da R.M.Wilson [3] che, nel 1974, ha provato che è possibile immergere una G-decomposizione parziale di $K_n$ in una G-decomposizione di $K_m$, con $m \geq n$ (dove per G-decomposizione parziale di un grafo H si intende una coppia $(H, G)$ con $G$ collezione di copie del grafo G, a due a due prive di spigoli in comune e tali che $\bigcup_{G \in G} S(G) \subseteq S(H)$, con S(G) ed S(H) spigoli rispettivamente dei grafi G ed H).

Ci si chiede allora quanto piccolo può essere l'ordine del sistema contenente. In merito ai sistemi parziali di terne di Steiner, un primo risultato è stato ottenuto da C. Lindner che, nel 1975, ha provato che un sistema parziale di terne di Steiner di ordine n si puó immergere in un sistema di terne di Steiner di ordine 6n+3. Successivamente, nel 1980, L.D. Andersem, A.J.W. Hilton e E. Mendelsohn hanno provato che un sistema parziale di terne di Steiner di ordine n si può immergere in un sistema di terne di terne di Steiner di ordine 4n+1, e questo è il miglior risultato tuttora conseguito.

Per quanto riguarda il problema dell'immersione di sistemi parziali di m-cicli, che sono G-decomposizioni parziali di $K_n$ con $G \equiv C_m$, diversi risultati sono stati ottenuti: per esempio è stato provato che un sistema parziale di m-cicli di ordine n si puó immergere in un sistema di m-cicli di ordine $(2n+1)m$ se m è dispari e di ordine $2mn+1$ se m è pari. Un ultimo risultato trovato in merito è dovuto a Lindner e Horák che hanno provato che un sistema di parziale di m-cicli di ordine n, con m pari, si può immergere in uno di ordine $\frac{mn}{2}$. Tali risultati si prestano a miglioramenti.

In questa tesi si affronta il problema dell'immersione di sistemi parziali di m-cicli con m pari. In particolare, viene presentata una costruzione molto piú semplice di quella data da Horák e Lindner per dimostrare l'ultimo risultato conseguito e si affronta poi il problema dell'immersione nel caso di sistemi parziali di m-cicli orientati.

Qui ci si limita ad esporre la costruzione relativa ai sistemi parziali di m-cicli orientati per m pari. Risultati contenuti nella tesi si trovano in [1] e [2].

## 1. – La $k\binom{x}{2}/\binom{k}{2}$ costruzione.

Sia $m=2k$, $k \geqslant 4$, X un insieme di cardinalità x, con $x \equiv 1 \bmod (k(k-1))$ sufficientemente grande, $(X, B)$ un disegno a blocchi di cardinalità k e Y un insieme di cardinalità $\binom{x}{2}/\binom{k}{2} = |B|$. Sia $S = (Y \times \{1, 2, \ldots, k\}) \cup X$. Sia $C$ l'insieme di m-cicli orientati definito come segue:

1) per ogni $i, j \in Y$, $i \neq j$ sia $(Y_i, Y_j, C(i, j))$ un sistema di m-cicli di ordine $(k, k)$, con parti $Y_i = \{i\} \times \{1, 2, \ldots, k\}$ e $Y_j = \{j\} \times \{1, 2, \ldots, k\}$. Sia $C(i, j) \subseteq C$.

2) sia $\alpha$ un'applicazione biunivoca, $\alpha : B \to Y$; per ogni blocco $b \in B$, sia $((\alpha(b) \times \{1, 2, \ldots, k\}) \cup b, C(b))$ un sistema di 2k-cicli orientati di ordine 2k. Sia $C(b) \subseteq C$, $\forall b \in B$.

3) per ogni $b \in B$ sia $(X_{\alpha(b)}, X \backslash b, C^*(b))$ un sistema di m-dicicli di ordine $(k, x-k)$ con parti $X_{\alpha(b)} = \alpha(b) \times \{1, 2, \ldots, k\}$ e $X \backslash b$. Sia $C^*(b) \subseteq (C)$.

È facile verificare che $(S, C)$ è un insieme di m-cicli orientati di ordine $k\binom{x}{2}/\binom{k}{2} + x$.

## 2. – L'immersione.

Sia $(Z, P)$ un sistema parziale di m-cicli orientati di ordine n, con $m=2k$, $k \geqslant 4$, x il minimo intero positivo $x \equiv 1$ $(mod k(k-1))$, $\binom{x}{2}/\binom{k}{2} \geqslant n$ e tale che esista un sistema a blocchi di ordine x con blocchi di cardinalità k, Y un insieme di cardinalità $\binom{x}{2}/\binom{k}{2}$ tale che $Z \subseteq Y$ e X un insieme di cardinalità x.

Sia $S = (Y \times \{1, 2, \dots, k\}) \cup X$ ed $(S, C)$ un sistema di m-cicli orientati costruito con la $k\binom{x}{2}/\binom{k}{2} + x$ costruzione.

Per ogni m-ciclo orientato $p = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in P$ definiamo un insieme mp di m-cicli orientati come segue:

k dispari

1′) $((x_1, i), (x_2, i), \dots, (x_m, i))$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, k\}$;

2′) $((x_1, 1), (x_{2k}, 1 + i), (x_{2k-1}, 2 + i), \dots, (x_2, k - 1 + i))$.

k pari

1″) $((x_1, 1), (x_2, 1), \dots, (x_m, 1))$ e $((x_1, k), (x_2, k), \dots, (x_m, k))$;

2″) $\forall \{i, i+1\}$, $i = 1, 2, \dots, k-1$

$((x_1, i), (x_{2k}, 1 + i), (x_{2k-1}, i), \dots, (x_2, i + 1))$ e $((x_1, i + 1), (x_{2k}, i), (x_{2k-1}, i + 1), \dots, (x_2, i))$, se i è dispari

$((x_1, j), (x_2, 1 + j), (x_3, j), \dots, (x_{2k-1}, j), (x_{2k}, j + 1))$ e $((x_1, j + 1), (x_2, j), (x_3, j + 1), \dots, (x_{2k-1}, j + 1), (x_{2k}, j))$, se j è pari.

Per ogni $a, b \in Y$, $a \neq b$, sia $v(a, b)$ il ciclo di $C$ che contiene lo spigolo $((a, 1), (b, 1))$.

Per ogni $p \in P$, $p = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ sia $vp = \{v(x_i, x_i + 1)/(x_i, x_i + 1) \in p\}$.

È facile verificare che mp e vp sono due sistemi parziali di m-cicli orientati mutuamente bilanciati (pur di scegliere opportunamente i cicli al punto 1 nella costruzione).

Osserviamo inoltre che se $p_1 \neq p_2$ e $p_1, p_2 \in P \Rightarrow vp_1 \neq vp_2$.

Sia $\underline{C} = (C \backslash vp), p \in P) \cup (mp/p \in P)$. Allora (S, $\underline{C}$) è un sistema di m-cicli orientati di ordine $k\,K\binom{x}{2}/\binom{k}{2} + x$ che contiene almeno k copie distinte del sistema parziale di m-cicli orientati $(Z, P)$ se k è dispari e almeno due copie distinte del sistema parziale di m-cicli orientati $(Z, P)$ se k è pari.

TEOREMA 1. – *Se $m \equiv 0\,(mod 2)$, $m > 6$, un sistema parziale di m-cicli orientati di ordine n si può immergere in un sistema di m-cicli orientati di ordine $k\binom{x}{2}/\binom{k}{2} + x$ dove x è il più piccolo intero positivo tale che esiste un disegno a blocchi di ordine x con blocchi di ordine k e $x \equiv 1\,(mod k(k-1))$, $x(x-1)/k(k-1) \geq n$.*

## 3 – Conclusioni.

Se x è il minimo intero positivo tale che le condizioni del precedente teorema sono soddisfatte, allora il sistema $(S, \underline{C})$ ha ordine

$$(1) \quad kn + (2\varepsilon k + 1)\sqrt{k(k-1)n + 1/4} + \varepsilon k(k-1)(\varepsilon k + 1) + 1/2 \quad per \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1.$$

Fissato $m = 2k$, (1) è asintotico in n a $mn/2$.

TEOREMA 2. – *Per grandi valori di n, un sistema parziale di 2k-cicli orientati di ordine n può essere immerso in un sistema di 2k-cicli di ordine* (1), *per* $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$. *Fissato* $m = 2k$, (1) *è asintotico in n a mn/2.*

## BIBLIOGRAFIA

[1] C.C. LINDNER, M.F. MAMMANA, *A Small Embedding for Partial Directed 6k-cycle Systems*, Australasian Journal of Comb., **18** (1998), 183-192.
[2] C.C. LINDNER, M.F. MAMMANA, *A Small Embedding for Large Partial Directed even-cycle Systems*, Australasian Journal of Comb., **20** (1999), 223-232.
[3] R.M. WILSON, *Construction and uses of pairwise balanced designs*, Math. Centre Tracts, **55** (1974), 18-41.

Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Catania,
e-mail: flavia@dmi.unict.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Messina) - Ciclo XI
Direttore di ricerca: Prof. Mario Gionfriddo.