Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Fabio Marcuzzi

Adattività nel metodo degli elementi finiti

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.3, p. 375–378.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_3_375_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie 8, Vol. III-A, Dicembre 2000, 375-378

Adattività nel metodo degli elementi finiti.

FABIO MARCUZZI

1. – Introduzione.

Il *Metodo degli Elementi Finiti* è un metodo numerico per la risoluzione di problemi differenziali ai valori iniziali ed ai limiti.

Dato che si sta parlando di un metodo di approssimazione della soluzione di un problema differenziale (alle derivate parziali) che utilizza uno spazio a dimensione finita di funzioni polinomiali a tratti (lo spazio degli elementi finiti), si capisce come sia importante, una volta scelta la *famiglia* di elementi finiti con cui formare lo spazio, stabilire la dimensione ed una base ottimali per questo spazio di elementi finiti. Questo può essere fatto prima di calcolare la soluzione, in base alla regolarità della soluzione esatta ed a stime che si basano sostanzialmente sull'errore di interpolazione, chiamate *stime a-priori*. Oppure, ciò può essere fatto dopo aver calcolato la soluzione ed utilizzato questa per produrre delle stime *a-posteriori*.

È proprio grazie a questo secondo tipo di stime che un metodo adattativo giunge, mediante un procedimento iterativo, ad una discretizzazione ottimale, adattando localmente quella usata al passo precedente là dove gli indicatori di errore suggeriscono di aggiungere o togliere elementi dalla base di funzioni (a cui corrispondono altrettante dimensioni dello spazio approssimante).

I primi studi relativi all'adattività per il metodo degli elementi finiti risalgono a circa 20 anni fa [1]. Nonostante l'applicazione dell'adattività a vari problemi alle derivate parziali abbia dimostrato che ogni applicazione richiede degli accorgimenti ad hoc, i problemi computazionali fondamentali sono gli stessi in ogni analisi adattativa e così le rispettive tecniche e metodologie risolutive risultano essere le stesse. Il lavoro di Tesi è stato impostato su queste tecniche generali, in particolare cercando eventuali sinergie tra i metodi utilizzati per risolvere i tre problemi numerici fondamentali dell'adattività per il metodo degli elementi finiti, che sono:

- il calcolo delle stime a-posteriori dell'errore di approssimazione;
- l'adattamento della discretizzazione di elementi finiti;
- l'aggiornamento della soluzione del sistema di equazioni risultante dalla discretizzazione.

2. – Miglior Approssimazione.

Come premessa all'adattività, è stato affrontato il problema della miglior approssimazione della soluzione nello spazio di elementi finiti utilizzato.

È ben noto che per i problemi del secondo ordine la cui forma bi-lineare (che compare nel problema di approssimazione variazionale corrispondente) sia simmetrica, oltreché continua e V-ellittica, la miglior approssimazione nella norma dell'energia è ottenuta con il metodo di Galerkin. Da questa classe di problemi ne rimangono però fuori parecchi di grande interesse per le applicazioni, ad esempio i problemi di convezione-diffusione dominati dalla convezione.

In questa Tesi viene proposto un metodo che fornisce la miglior approssimazione per una classe di operatori più vasta (che comprende ad esempio anche i problemi di convezione-diffusione) e cioè quella degli operatori lineari invertibili e dotati di aggiunto. Il metodo proposto ha tratto ispirazione dai *metodi stabilizzati* [2] [3]: la stabilità della soluzione numerica è migliorata dall'aggiunta di un termine alla formulazione variazionale che non pregiudica la consistenza del metodo. Questa operazione di aggiunta può essere dimostrata essere equivalente ad una modifica delle funzioni peso utilizzate per ottenere la soluzione (il metodo degli elementi finiti è un metodo dei residui pesati). È proprio vedendo il metodo degli elementi finiti anche da questo punto di vista, e non solo come metodo di approssimazione variazionale (come viene solitamente fatto), che si è costruito un metodo analitico per la scelta delle funzioni peso che porti ad ottenere la soluzione il cui errore di approssimazione della soluzione vera è ortogonale allo spazio di funzioni approssimanti rispetto al prodotto interno con cui viene costruito il metodo (e che generalmente è quello di L_2), e cioè la soluzione calcolata è la miglior approssimazione rispetto alla norma indotta da tale prodotto interno, come garantito dal ben noto *Teorema di Proiezione*.

3. – Adattività.

Il lavoro svolto sull'adattività è partito dall'osservazione che ad ogni passo di adattamento della discretizzazione è richiesto di aggiornare la soluzione di un sistema di equazioni che è una versione modificata, in una piccola percentuale di equazioni, di un precedente sistema di cui la soluzione è già stata calcolata . Un buon punto di partenza per risolvere questo problema è sembrato il metodo del Bordering/Reverse-Bordering [4].

Il lavoro si è inoltre basato sostanzialmente sulla osservazione che la modifica di poche equazioni corrispondenti ad una zona compatta del dominio del problema conduce ad una modificazione, al di sopra di una tolleranza significativa per le applicazioni, di un numero limitato di variabili del sistema. Di conseguenza, l'approccio numerico alla soluzone del problema dell'aggiornamento è quello di puntare ad agire solo su queste equazioni.

Allo scopo sono stati sviluppati due metodi: il primo è una sostanziale revisione del metodo del Bordering e determina tale insieme di equazioni in modo incrementale, dopo aver calcolato la soluzione parziale del sottosistema precedente e quindi *a-posteriori*, utilizzando il residuo sul sistema globale come criterio di arresto. Per questo metodo risulta particolarmente vantaggiosa la suddivisione operata da un algoritmo ricorsivo di discretizzazione sviluppato anch'esso durante il lavoro di Tesi. Il secondo metodo utilizza la funzione di Green ed il principio di massimo per determinare tale insieme di equazioni prima di cominciare il calcolo della soluzione (e quindi *a-priori*).

Le prime sperimentazioni confermano il fatto che questo approccio conduce ad una drastica riduzione della complessità computazionale richiesta per risolvere il problema dell'aggiornamento. Questo fatto risulta essere molto importante per l'adattività in quanto permette di risolvere il problema della stima a-posteriori direttamente sul modello esatto dell'errore mediante estensioni locali dello spazio approssimante ed un aggiornamento globale della soluzione, cosa quest'ultima che è stata sempre evitata in letteratura a causa del suo costo computazionale proibitivo ed ha costretto l'introduzione di meccanismi complicati, e non sempre efficaci, di disaccoppiamento del problema in sotto-problemi locali.

4. – Problemi dipendenti dal tempo.

L'adattività per i problemi che evolvono nel tempo richiede l'adattamento sia della discretizzazione spaziale che temporale. Questo può dar luogo a difficoltà nella dimostrazione di teoremi riguardanti le stime a-posteriori ed a problemi di efficienza numerica se viene utilizzato il diffusissimo *Metodo di Semi-Discretizzazione* e quindi la discretizzazione con elementi finiti solo nello spazio. Utilizzando, invece, la discretizzazione agli elementi finiti spazio-tempo ([5] e rif. ivi contenuti) si può adattare la discretizzazione nello spazio e nel tempo con un unico stimatore a-posteriori.

In particolare, in questa Tesi viene proposto uno schema adattativo direzionale che, valutando l'errore per componenti e non solo dunque la sua norma complessiva, determina la direzione lungo la quale l'errore è maggiore e di conseguenza riduce localmente e direzionalmente il parametro dimensionale h in base al quale viene normalmente misurata la convergenza alla soluzione vera.

BIBLIOGRAFIA

[1] I. Babuska e W.Rheinboldt, *Error Estimates for Adaptive Finite Element Computations,* SIAM J. Numer. Anal., **15** (1978), 736-754.

[2] A. Brooks, T.J.R. Hughes, *Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin Formulations for Convection Dominated Flows with particular emphasis on the Incompressible Navier-Stokes Equations,* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **32** (1982), 199-259.

[3] F. Brezzi, L.P. Franca, T.J.R. Hughes, A. Russo, *Stabilization techniques and subgrid scales capturing,* The state of the art in numerical analysis, Oxford Univ. Press, New York (1997), 391-406.
[4] C. Brezinski, M. Morandi Cecchi, M. Redivo Zaglia, *The reverse bordering method,* SIAM J. Matrix Anal. Appl., **15** (1994), 922-937.
[5] M. Morandi Cecchi, R. Nociforo, P. Patuzzo Grego, *Space-Time Finite Elements Numerical Solution of Burgers Problems,* Le Matematiche, **LI-Fasc.I** (1996), 43-57.

Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata, Università di Padova
Dottorato in Matematica Computazionale
(sede amministrativa: Università di Padova) - Ciclo XII
Direttore di ricerca: Prof. Maria Morandi Cecchi, Università di Padova