Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Annamaria Miranda

Topologie su spazi di funzioni derivanti da topologie su iperspazi

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.3, p. 387–390.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_3_387_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie 8, Vol. III-A, Dicembre 2000, 387-390

Topologie su spazi di funzioni derivanti da topologie su iperspazi.

ANNAMARIA MIRANDA

Gli iperspazi, gli spazi di funzioni e le loro interdipendenze sono il motivo conduttore della tesi. È noto che ogni spazio di funzioni si immerge nell'iperspazio del prodotto del dominio per il rango quando una funzione venga identificata con il proprio grafo o epigrafo e dunque su di esso resta traccia di ogni ipertopologia. Viceversa, l'iperspazio di uno spazio metrico si immerge in modo naturale nello spazio delle funzioni reali limitate sui limitati quando un chiuso venga identificato con il funzionale distanza che esso determina, e dunque su di esso rimane traccia di ogni convergenza, topologia, uniformità, metrica che si possa definire per funzioni.

Le più note ipertopologie di Vietoris e di Fell tra le prime comparse in letteratura, di Hausdorff derivante dalla metrica di Hausdorff che descrive bene il mondo dei frattali e più in generale i fenomeni naturali, di Wijsman fondamentale in analisi convessa e di Attouch-Wets più recentemente introdotta ed usata in ottimizzazione, si lasciano decomporre in pezzi che poi *sapientemente* mixati danno luogo a nuove ed interessanti topologie. Muovendosi in questa ottica, viene naturale l'idea di produrre topologie di tipo *set-open* con topologie derivanti da ipertopologie, per esempio da quelle citate ma anche da altre, da esse derivanti o ad esse legate, o da loro spezzoni.

In questo affascinante gioco interattivo si genera la possibilità di trovare nuove formulazioni delle topologie tradizionali di tipo *set-open* e, produrre, una volta fissato un network nel dominio ed una ipertopologia sull'iperspazio del rango, nuove classi di topologie su spazi di funzioni.

La tesi prende spunto dall'idea del Prof.Naimpally, derivante da utili modificazioni anche relativamente recenti dell'ipertopologia di Vietoris, di generalizzare le tradizionali topologie di tipo *set-open* semplicemente sostituendo gli aperti con famiglie localmente finite di aperti; dalla conseguente idea della Prof.Di Concilio dell'esistenza di un metodo *generale* e *naturale* di *mixare* topologie su spazi di funzioni di tipo *set-open* con topologie derivanti da ipertopologie sul rango; e dalla convinzione dell'autore dell'esistenza di vari gradi di generalizzazione e della possibilità di ottenere esempi concreti di nuove classi di topologie su spazi di funzioni determinanti convergenze eventualmente utili nelle applicazioni per la scelta ampia di *networks* e di ipertopologie interessanti soprattutto in ambito metrico.

Se $C(X, Y)$ è l'insieme delle funzioni continue da uno spazio topologico X verso uno spazio topologico Y e $CL(Y)$ è l'iperspazio di Y, si può dimostrare che una rete di funzioni $\{f_\lambda\}$ converge ad f in $C(X, Y)$ nella topologia compatta-aperta quando per ogni compatto K in X la rete di compatti $\{f_\lambda(K)\}$ converge al compatto $f(K)$ nella topologia di Vietoris di $CL(Y)$. Inoltre, in modo del tutto analogo, quando

$Y = \mathbf{R}$ con la metrica euclidea, una rete $\{f_\lambda\}$ converge ad f nella topologia *bounded-open* [3], se e solo se per ogni sottoinsieme funzionalmente limitato B di X la rete $\{\overline{f_\lambda(B)}\}$ converge ad $\overline{f(B)}$ in $CL(Y)$ ancora nella topologia di Vietoris. Questo nuovo modo di guardare alla topologia compatta-aperta ed alla topologia *bounded-open* rivela un forte interscambio fra le topologie di tipo *set-open* su $C(X, Y)$ e la topologia di Vietoris su $CL(Y)$. Infatti la topologia compatta-aperta e la topologia *bounded-open* sono essenzialmente casi particolari di un risultato più generale. Ciò suggerisce di introdurre una procedura naturale che genera topologie su spazi di funzioni utilizzando topologie su iperspazi e networks. Ogni network α in X e ogni topologia τ su $CL(Y)$ inducono una topologia τ_α su $C(X, Y)$ quando si richieda che: *una rete* $\{f_\lambda\}$ *converge in* τ_α *ad* f *in* $C(X, Y)$ *quando la rete* $\{\overline{f_\lambda(A)}\}$ *converge in* τ *ad* $\overline{f(A)}$ *in* $CL(Y)$ *per ogni* A *in* α.

La tesi è incentrata sulla procedura appena descritta che determina nello spazio funzionale $C(X, Y)$ una convergenza una volta scelto un network nel dominio X ed una convergenza in $CL(Y)$, individua il contesto più generale in cui essa ha senso, cioè gli spazi di convergenza, deduce da una struttura di convergenza, topologica, uniforme, quasi-uniforme, prossimale, metrica su Y oppure su $CL(Y)$ il tipo di struttura su $C(X, Y)$ in cui la convergenza si colloca (cfr.Proposizioni 1,2 e 4). Stabilisce nel caso topologico e di buona immersione di Y in $CL(Y)$ le proprietà di separazione e di uniformizzabilità di τ_α. Per particolari classi di ipertopologie di tipo Vietoris, di tipo Vietoris prossimale che si spezzano in due tronconi, parte *hit* e parte *miss*, dimostra la ininfluenza della parte *hit* nella determinazione di τ_α indipendentemente dalla scelta del network α. Dimostra risultati sulle funzioni cardinali dello spazio funzionale $(C(X, Y), \tau_\alpha)$ in relazione a proprietà di cardinalità del network α e del rango Y, che sono comprensivi di proposizoni su proprietà di contabilità, I e II assioma della numerabilità, compresa la metrizzabilità di τ_α (cfr.Proposizioni 3 e 4). Confronta τ_α con altre topologie già note, di tipo set-open e di convergenza uniforme stabilendo la gerarchia e dando condizioni necessarie e sufficienti per la coincidenza per particolari network (cfr.Teorema 2). Contiene risultati riguardanti le topologie uniformizzabili $\tau_{\alpha, d}$ che si ottengono da metriche di Hausdorff d_H su $CL(Y)$ relative a metriche d compatibili con il rango Y, [2]. Ogni topologia $\tau_{\alpha, d}$ è uniformizzabile, metrizzabile quando α è numerabile e meno fine della topologia della convergenza uniforme sugli elementi di α determinata dalla stessa metrica d. Se anche il dominio è metrico, la convergenza in $\tau_{\alpha, d}$ è distinta dalle convergenze funzionali di Hausdorff e Attouch-Wets come mostrano controesempi costruiti su spazi interessanti. La classe delle $\tau_{\alpha, d}$, topologie la cui natura è per metà topologica e per metà uniforme, si connette con la topologia $\tau_{\alpha,\, loc.fin.}$ derivante dalla topologia localmente finita sui chiusi del rango che è invece un carattere puramente topologico (cfr.Corollario 1). Quest'ultima è uniformizzabile o completamente regolare (risp. regolare) quando lo è Y ed il network gode di una particolare proprietà legata ad Y ed a $C(X, Y)$, la proprietà di normalità (risp. di regolarità) rispetto a Y (cfr.Teorema 4 e per le definizioni [2]).

In questa nota si pone l'attenzione non solo su alcuni risultati di carattere generale relativi alle proprietà dell'iperspazio che possono essere assorbite dallo spazio di funzioni ma anche su teoremi che si ottengono dotando l'iperspazio di particolari topologie:

PROPOSIZIONE 1. – *Sia* $(CL(Y), \tau)$ *uno spazio uniformizzabile e* α *un network su* X. *Allora* $(C(X, Y), \tau_\alpha)$ *è uniformizzabile.*

PROPOSIZIONE 2. – *Sia* $(CL(Y), \tau)$ *uno spazio metrizzabile e* α *un network numerabile su* X. *Allora* $(C(X, Y), \tau_\alpha)$ *è metrizzabile.*

TEOREMA 1. – Y *uno spazio topologico* T_2, α *un network* Y*-chiuso su* X, τ *una topologia su* $CL(Y)$ *per cui* $\tau_\alpha^+ = \tau_\alpha$ *con* τ^+ *ammissibile. Se* τ *è metrizzabile e* $\alpha anw(X) = \omega$ *allora* τ_α *è metrizzabile.*

Si acquisiscono legami tra alcune funzioni cardinali di X, Y, $CL(Y)$:

PROPOSIZIONE 3. – *Per ogni network* α *su* X *e per ogni topologia* τ *su* $CL(Y)$ *si ha*

$$w(C(X, Y), \tau_\alpha) \leq |\alpha| w(CL(Y), \tau).$$

PROPOSIZIONE 4. – *Siano* X *uno spazio topologico completamente regolare,* $Y = \mathbf{R}$, α *un network su* X *chiuso rispetto alle unioni finite,* τ *una topologia* T_1 *del tipo «miss» su* $CL(Y)$. *Allora*

$$\alpha a(X) \leq \chi(C(X, \mathbf{R}), \tau_\alpha).$$

Si ottengono inoltre proprietà per gli spazi di funzioni $(C(X, Y), \tau_\alpha)$ che, in particolare, si generano dotando, in ipotesi di metrizzabilità, l'iperspazio del rango di metriche di Hausdorff compatibili, focalizzando l'attenzione sul loro estremo superiore $\tau_{\alpha, loc.fin.}$ che è indotto mediante la procedura dalla topologia localmente finita su $(C(X, Y)$.

Siano $(X, d_1), (Y, d_2)$ spazi metrici. Su $C(X, Y)$ si possono definire le topologie funzionali di Hausdorff e di Attouch-Wets identificando ogni funzione con il suo grafico. Alcuni teoremi, [2], mostrano che su $C(X, Y)$, τ_{α, d_2}, ottenuta dotando $CL(Y)$ della metrica di Hausdorff indotta da d_2, è distinta da esse. Controesempi rivelano anche che la topologia della convergenza uniforme su $C(X, Y)$ in generale strettamente più fine di τ_{α, d_2}, e risulta:

TEOREMA 2. – *Se* α *è* Y*-compatto* (*cfr.* [2]) *allora* τ_{α, d_2} *coincide con la topologia della convergenza uniforme su* α *su* $C(X, Y)$.

Lo studio della topologia $\tau_{\alpha, loc.fin.}$ si apre con risultati sul confronto con $\tau_{\alpha, V}$, generata mediante la procedura dalla topologia di Vietoris sull'iperspazio del rango. Si dimostra infatti che $\tau_{\alpha, loc.fin.}$ *coincide con* $\tau_{\alpha, V}$ *se e solo se* α *è compatto* scegliendo particolari networks. Si ottengono inoltre i seguenti risultati:

TEOREMA 3. – *Siano* X *uno spazio topologico,* α *un network su* X. *Allora*

(*i*) *Se* Y *è regolare ed* α *è regolare rispetto ad* Y *allora* $\tau_{\alpha, loc.fin.}$ *è regolare.*

(*ii*) *Se* Y *è completamente regolare* (*uniformizzabile*) *ed* α *è normale rispetto ad* Y *allora* $\tau_{\alpha, loc.fin.}$ *è completamente regolare.*

COROLLARIO 1. – *Siano X uno spazio topologico, α un network su X. Allora:*

(1. Beer) *Se Y è metrizzabile allora $\tau_{\alpha, loc. fin.}$ è l'estremo superiore delle $\tau_{\alpha, d}$ al variare di d nella famiglia delle metriche compatibili su Y;*

(2. Naimpally) *Se Y è normale allora $\tau_{\alpha, loc. fin.}$ è la topologia $\tau_{\alpha, fine}$ indotta dalla topologia su $CL(Y)$ associata alla più fine uniformità di Hausdorff.*

Si presentano poi risultati sulla metrizzabilità di $\tau_{\alpha, V}$, e si conclude con un teorema sulla completa uniformizzabilità di $\tau_{\alpha, d}$:

PROPOSIZIONE 5. – *Siano X uno spazio topologico, $Y = \mathbf{R}$, α un network Y-compatto (cfr. [2]) ereditariamente chiuso. Allora le seguenti sono equivalenti:*

(1) *$(C(X, Y), \tau_{\alpha, V})$ è metrizzabile;*

(2) *$(C(X, Y), \tau_{\alpha, V})$ soddisfa al I assioma della numerabilità;*

(3) *$\alpha a(X) = \omega$.*

TEOREMA 4. – *Siano X uno spazio topologico, d una metrica compatibile su Y, α un network contenente i singoletti Y-chiuso (vale a dire ogni elemento di α ha immagine chiusa in Y mediante una qualsiasi funzione di $(C(X, Y))$, funzionalmente separante. Allora le seguenti sono equivalenti:*

(1) *$C(X, Y)$, $\tau_{\alpha, d}$ è separabile e metrizzabile;*

(2) *$(C(X, Y), \tau_{\alpha, d})$ verifica il II assioma della numerabilità;*

(3) *$\alpha anw(X) = \omega$.*

TEOREMA 5. – *Siano α un network Y-compatto su X ed X un α-spazio. Allora Yè completamente metrizzabile se e solo se $(C(X, Y), \tau_{\alpha, d})$ è completamente uniformizzabile.*

BIBLIOGRAFIA

[1] BEER P., HIMMELBERG C.J., PRIKRY K., VAN VLECK F.S., *The locally finite topology on 2^X*, Proc. Amer. Math. Soc., **101** (1987), 168-172.

[2] DI CONCILIO A., MIRANDA A., *Function space topologies deriving from hypertopologies and networks,* in corso di stampa su Bollettino U.M.I..

[3] KUNDU S., RAHA A.B., *The bounded-open topology and its relatives,* Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste, **27** (1995), 61-77.

[4] MCCOY R.A., NTANTU I., *Topological properties of spaces of continuous functions,* Lecture Notes in Math., Springer Verlag, **1315** (1988).

[5] NAIMPALLY S.A., SHARMA P.L., *Fine uniformity and the locally finite topo- logy,* Proc. Amer. Math. Soc., **103** (1988), 641-646.

Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Salerno
e-mail: miranda@bridge.diima.unisa.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Napoli) - Ciclo XI
Direttore di ricerca: Prof. A. Di Concilio, Università di Salerno