Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Carmela Musella

Alcuni aspetti della teoria reticolare dei gruppi infiniti

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.3, p. 391–394.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_3_391_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie 8, Vol. III-A, Dicembre 2000, 391-394

Alcuni aspetti della teoria reticolare dei gruppi infiniti.

Carmela Musella

1. – Modularità.

Sia $\mathfrak{L}$ un reticolo. Un elemento a di $\mathfrak{L}$ si dice modulare se verifica le seguenti proprietà:

- $x \vee (a \wedge z) = (x \vee a) \wedge z$, qualunque siano gli elementi x, z di $\mathfrak{L}$ tali che $x \leqslant z$.
- $a \vee (y \wedge z) = (a \vee y) \wedge z$, qualunque siano gli elementi y, z di $\mathfrak{L}$ tali che $a \leqslant z$.

Il reticolo $\mathfrak{L}$ si dice modulare se tutti i suoi elementi sono modulari.

I gruppi abeliani e i cosiddetti gruppi di Tarski (gruppi infiniti in cui ogni sottogruppo proprio e non identico ha ordine primo) sono esempi di gruppi il cui reticolo dei sottogruppi è modulare. La struttura dei gruppi con il reticolo dei sottogruppi modulare è ben nota (cfr. [6], Chapter 2). In particolare, Iwasawa ha provato che un gruppo senza torsione con questa proprietà è abeliano, e Zappa ha dimostrato che in gruppo G tale che $\mathfrak{L}(G)$ sia modulare l'insieme degli elementi periodici è un sottogruppo.

Se G è un gruppo policiclico, molte proprietà possono essere dedotte per G dal comportamento delle sue immagini omomorfe finite. Il primo teorema di questo tipo fu ottenuto da Hirsch, che provò che un gruppo policiclico non nilpotente deve avere un'immagine omomorfa finita non nilpotente. Un risultato corrispondente per la supersolubiltà fu poi provato da Baer. Più recentemente, Lennox e Wilson hanno dimostrato che un sottogruppo H di un gruppo policiclico G è *quasinormale* (cioè $HK = KH$ per ogni sottogruppo K di G) se e solo se H^σ è quasinormale in G^σ per ogni immagine omomorfa finita G^σ di G. È ben noto che un sottogruppo H di un gruppo G è quasinormale in G se e solo se è un sottogruppo ascendente ed è anche un elemento modulare del reticolo $\mathfrak{L}(G)$ (cfr. [6], Theorem 6.2.10). Dunque i gruppi il cui reticolo dei sottogruppi è modulare possono essere considerati come una naturale generalizzazione dei gruppi in cui ogni sottogruppo è quasinormale. Il prossimo risultato mostra che in un gruppo policiclico la modularità può essere controllata esaminando i reticoli delle immagini omomorfe finite. Si noti che nell'enunciato si può equivalentemente supporre che il gruppo G sia un'estensione finita di un gruppo policiclico, poichè i gruppi finiti con il reticolo dei sottogruppi modulare sono risolubili (cfr. [6], Theorem 2.4.4.).

Teorema 1.1 ([5]). – *Sia G un gruppo policiclico. Se il reticolo dei sottogruppi di ogni immagine omomorfa finita di G è modulare, allora $\mathfrak{L}(G)$ è modulare.*

2. – Isomorfismi reticolari.

Siano G e $\overline{G}$ gruppi. Un isomorfismo tra i reticoli $\mathfrak{L}(G)$ e $\mathfrak{L}(\overline{G})$ prende il nome di *proiettività* da G su $\overline{G}$. Ogni isomorfismo di gruppi induce in maniera naturale una proiettività, mentre esistono gruppi reticolarmente isomorfi che non sono isomorfi. Una classe di esempi di questo tipo si ottiene esaminando i P-gruppi. Un gruppo G si dice un *P-gruppo* se è prodotto semidiretto di un gruppo abeliano A di esponente primo e di un gruppo di ordine primo che induce su A un automorfismo potenza non banale. Si vede facilmente che se A ha ordine p^n (con p primo e $n > 0$), allora esiste una proiettività da G su un gruppo abeliano di ordine p^{n+1}. D'altra parte è stato provato da Yakovlev che ogni immagine proiettiva di un gruppo risolubile è un gruppo risolubile, e ciò è stato poi esteso da Busetto ai gruppi iperabeliani; inoltre Zacher ha dimostrato che la classe dei gruppi iperciclici è invariante per proiettività. Da questi risultati segue che anche i gruppi policiclici e i gruppi supersolubili formano classi di gruppi invarianti per proiettività.

Si dice che un gruppo G è un *FC-gruppo* se le classi di coniugio dei suoi elementi sono finite, o equivalentemente, se per ogni elemento x di G il centralizzante $C_G(x)$ ha indice finito in G. La classe degli FC-gruppi non è invariante per proiettività, poichè esistono gruppi che non hanno la proprietà FC ma sono reticolarmente isomorfi a gruppi abeliani (per esempio, i P-gruppi infiniti). D'altra parte, alcune proprietà gruppali, connesse con gli FC-gruppi e che generalizzano la nilpotenza e la risolubilità, definiscono classi di gruppi invarianti per proiettività.

Si dice che un gruppo G è *FC-risolubile* se possiede una serie di lunghezza finita i cui fattori sono FC-gruppi.

TEOREMA 2.1 ([1]). – *La classe dei gruppi FC-risolubili è invariante per proiettività.*

Sia G un gruppo. L'*FC-centro* $F(G)$ di G è il sottogruppo costituito dagli elementi che hanno solo un numero finito di coniugati in G. Allora un gruppo G è un FC-gruppo se e solo se coincide con il suo FC-centro. La *serie FC-centrale superiore* $\{F_\alpha(G)\}_\alpha$ del gruppo G è definita da

$$F_0(G) = \{1\}, \qquad F_{\alpha+1}(G)/F_\alpha(G) = F(G/F_\alpha(G))$$

per ogni ordinale α e

$$F_\lambda(G) = \bigcup_{\beta<\lambda} F_\beta(G)$$

se λ è un ordinale limite. Il gruppo G è detto *FC-ipercentrale* se $G = F_\tau(G)$ per qualche ordinale τ.

TEOREMA 2.2 ([1]). – *La classe dei gruppi FC-ipercentrali è invariante per proiettività.*

Se $\varphi : \mathfrak{L}(G) \to \mathfrak{L}(\overline{G})$ è una proiettività, e N è un sottogruppo normale di G, l'immagine N^φ è un sottogruppo modulare di $\overline{G}$ (nel senso che N^φ è un elemento modulare del reticolo $\mathfrak{L}(\overline{G})$). Inoltre un noto teorema di Zacher e Rips (cfr. [6], Theorem 6.1.7) afferma che se H è un sottogruppo di indice finito di G, allora H^φ

ha indice finito in $\overline{G}$. Si dice che un sottogruppo H di un gruppo G è permodulare in G se H è modulare in G e verifica la seguente condizione

- Se g è un elemento di G e Y è un sottogruppo di G tale che $H \leqslant Y \leqslant \langle H, g\rangle$ e l'intervallo $[\langle H, g\rangle / Y]$ è finito, allora Y ha indice finito in $\langle H, g\rangle$.

Il teorema di Zacher e Rips assicura allora che l'immagine proiettiva di un sottogruppo permodulare è un sottogruppo permodulare. Il concetto di sottogruppo permodulare, che fu introdotto da Zacher nel 1982, è stato fondamentale nella determinazione di caratterizzazioni reticolari di molte classi di gruppi infiniti. Nello studio reticolare della proprietà FC è stato rilevante il seguente concetto. Diciamo che un sottogruppo H di un gruppo G è *almost permodulare* in G se esiste un sottogruppo K di indice finito in G contenente H tale che H sia permodulare in K. La definizione di elemento almost permodulare può essere data in un reticolo arbitrario (cfr. [1]), e un reticolo i cui elementi ciclici sono almost permodulari è detto un *FC-reticolo*.

Sia $\mathfrak{X}$ una classe di gruppi. Un gruppo G è detto *iper-*$\mathfrak{X}$ se è dotato di una serie ascendente di sottogruppi normali tale che ogni fattore della serie appartenga a $\mathfrak{X}$. Il prossimo risultato fornisce una caratterizzazione reticolare della classe dei gruppi iper-FC.

TEOREMA 2.3 ([1]). – *Un gruppo G è iper-FC se e solo se esiste una catena ascendente*

$$\{1\} = X_0 < X_1 < \ldots < X_\alpha < X_{\alpha+1} < \ldots < X_\tau = G$$

di sottogruppi permodulari di G tale che per ogni numero ordinale $\alpha < \tau$ l'intervallo $[X_{\alpha+1}/X_\alpha]$ è un FC-reticolo.

Un sottogruppo H di un gruppo G si dice *almost normal* in G se il suo normalizzante $N_G(H)$ ha indice finito in G, cioè se H ha solo un numero finito di coniugati in G. L'insieme $an(G)$ dei sottogruppi almost normal di un gruppo G è un sottoreticolo del reticolo $\mathfrak{L}(G)$, ed esso ovviamente contiene il sottoreticolo $\mathfrak{N}(G)$ dei sottogruppi normali di G. Il grande sviluppo della teoria delle proiettività suggerisce di considerare gli isomorfismi $\varphi : an(G) \to an(\overline{G})$, investigando le conseguenze per il gruppo $\overline{G}$ dell'imposizione di alcune condizioni su G. Il principale risultato ottenuto è il seguente.

TEOREMA 2.4 ([2]). – Siano G un gruppo supersolubile e $\overline{G}$ un gruppo FC-risolubile, e sia $\varphi : an(G) \to an(\overline{G})$ un isomorfismo reticolare. Allora $\overline{G}$ è supersolubile.

Un noto teorema di Busetto e Schmidt afferma che se φ è una proiettività da un gruppo G su un gruppo $\overline{G}$, e se N è un sottogruppo normale di G, allora le controimmagini del nocciolo e della chiusura normale di N^φ in $\overline{G}$ sono sottogruppi normali di G (cfr. [6], Theorem 6.5.6). Risultati di questo tipo sono stati ottenuti anche per gli isomorfismi tra reticoli di sottogruppi almost normal. In particolare, si è provato il seguente teorema.

TEOREMA 2.5 ([3]). – *Siano G e $\overline{G}$ gruppi FC-risolubili, e sia φ un isomorfismo tra i reticoli $an(G)$ e $an(\overline{G})$. Se N è un sottogruppo normale di G tale che il gruppo quoziente G/N è policiclico-per-finito, e H^φ e K^φ sono rispettivamente la* *chiusura normale ed il nocciolo di N^{φ} in $\overline{G}$, allora H e K sono sottogruppi normali di G.*

Un sottogruppo H di un gruppo G si dice *nearly normal* in G se H ha indice finito nella sua chiusura normale in G. L'insieme $nn(G)$ dei sottogruppi nearly normal di un gruppo G è un sottoreticolo del reticolo $\mathfrak{L}(G)$.

In generale, se G è un gruppo arbitrario, i reticoli $nn(G)$ e $an(G)$ non sono confrontabili. Se G e $\overline{G}$ sono gruppi e $\varphi : nn(G) \to nn(\overline{G})$ è un isomorfismo, è naturale affrontare il problema di stabilire quali proprietà gruppali di G vengano ereditate da $\overline{G}$. La maggior parte dei risultati ottenuti per gli isomorfismi tra reticoli di sottogruppi almost normal sono stati trasportati anche al caso degli isomorfismi tra reticoli di sottogruppi nearly normal (cfr. [4]).

BIBLIOGRAFIA

[1] F. de Giovanni, C. Musella , *FC-groups and projectivities,* Boll. Un. Mat. Ital., in corso di stampa.
[2] C. Musella, *On almost normal subgroups of supersoluble groups,* Boll. Un. Mat. Ital., **2-B** (1999), 715-722.
[3] C. Musella, *Isomorphisms between lattices of almost normal subgroups,* Rend. Circ. Mat. Palermo, **49** (2000), in corso di stampa.
[4] C. Musella, *Isomorphisms between lattices of nearly normal subgroups,* Note Mat., in corso di stampa.
[5] C. Musella, *Polycyclic groups with modular finite homomorphic images,* Arch. Math. (Basel), **74** (2000), in corso di stampa.
[6] R. Schmidt, *Subgroup Lattices of Groups,* de Gruyter, (1994).

Dipartimento di Matematica e Applicazioni «R. Caccioppoli»
Università di Napoli «Federico II»; e-mail: musella@matna2.dma.unina.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Napoli) - Ciclo XI
Direttore di ricerca: Prof. Francesco de Giovanni, Dipartimento di Matematica e Applicazioni «R. Caccioppoli», Università di Napoli «Federico II»