Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Giulio Schimperna

Problemi di trasmissione per sistemi parabolici nonlineari di tipo Phase-Field

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.3, p. 399–402.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_3_399_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie 8, Vol. III-A, Dicembre 2000, 399-402

Problemi di trasmissione per sistemi parabolici nonlineari di tipo Phase-Field.

GIULIO SCHIMPERNA

1. – Il modello di phase-field.

Il modello o, meglio, i modelli di phase-field si propongono di descrivere in termini matematici alcuni fenomeni particolarmente complessi che intervengono nei processi termodinamici di fusione-solidificazione di vari tipi di sostanze. Storicamente, lo studio di tali processi ha avuto inizio alla fine del XIX secolo grazie all'opera del fisico austriaco Josef Stefan, il quale, sulla base di osservazioni dirette del comportamento dei ghiacci polari, introdusse il famoso problema legato all'evoluzione nel tempo di una miscela acqua-ghiaccio. Una formulazione matematica del *problema di Stefan* può essere ottenuta considerando due equazioni di tipo calore sulle fasi pure, più una condizione sull'interfaccia incognita che esprime lo scambio di energia tra le fasi tramite la liberazione di calore latente.

I primi approcci al problema tramite tecniche di analisi matematica moderna risalgono circa al 1960, ma è solo dagli anni '70, a seguito dei lavori di Damlamian [2], Friedman, ed altri, che questo tipo di modelli è diventato molto popolare all'interno della comunità scientifica. Tra i motivi di questo «boom», che dura a tutt'oggi, vi è l'introduzione di una forma debole del problema che fa scomparire la condizione esplicita all'interfaccia, sostituendola con una relazione intrinseca (un'inclusione legata ad un *grafico massimale monotono*) e consente uno studio del modello con tecniche variazionali. In quest'ottica, inoltre, sono state introdotte svariate generalizzazioni del problema originario e, tra queste, i modelli di *phase field*.

Tali modelli, introdotti in [1], presentano una diffusione spazio-temporale di tipo parabolico per il parametro di fase χ, il quale indica precisamente la proporzione tra gli stati della sostanza. In questo modo, si riescono a descrivere diversi fenomeni termodinamici complessi quali il *superraffreddamento*, la tensione superficiale dello stato fluido o, anche, la presenza di un'interfaccia di spessore non nullo tra le due fasi. Denotando con θ la temperatura del materiale, il relativo sistema di PDE può essere scritto come segue:

$$\varrho\theta_t + \lambda\chi_t - \operatorname{div}(k\nabla\theta) = f, \tag{1}$$

$$\mu\chi_t - \operatorname{div}(\nu\nabla\chi) + \alpha(\chi) - c\chi = \lambda\theta. \tag{2}$$

Qui ϱ è il calore specifico per unità di volume, λ il calore latente di fusione, k il tensore di conducibilità termica, f la sorgente di calore, μ e ν i parametri di rilassamento della variabile di fase e $\alpha(\chi) - c\chi$ la derivata di un potenziale termodinamico di doppio pozzo, che, con varianti diverse, è caratteristico del modello. Più in dettaglio, il grafico massimale monotono α ne indica la parte non decrescente, mentre il termine $-c\chi$ è il resto. Le equazioni (1-2) costituiscono un sistema parabolico del secondo ordine e vanno naturalmente accoppiate ad opportune condizioni iniziali ed al contorno; in base a considerazioni fisiche, queste ultime sono da assumersi di tipo Neumann omogeneo per la variabile χ.

2. – L'approccio astratto.

Oggetto della mia tesi è lo studio di alcuni problemi matematici relativi al modello di phase field sopra descritto. Il primo obiettivo è trattare una generalizzazione del sistema (1-2), che viene reimpostato ed affrontato in un quadro variazionale astratto. In questo modo, si vuole dare un risultato di esistenza sufficientemente generale, che possa essere applicato al maggior numero possibile di problemi concreti. Il teorema astratto è il seguente:

TEOREMA 1. – *Siano H, V spazi di Hilbert, tali che $V \subset\subset H$. Identifichiamo H ed H', in modo tale che valgano le inclusioni $V \subset H \subset V'$. Supponiamo inoltre:*

(3) $\alpha, \lambda_0, C_0, C_1, C_2, \varrho, \mu > 0$ *costanti assegnate*,

(4) $P, L, M, \Lambda \in \mathcal{L}(H), \quad A, B \in \mathcal{L}(V, V')$ *operatori simmetrici*,

(5) $f \in L^2(0, T; V')$,

(6) $(Ph, h)_H \geq \varrho \|h\|_H^2, \qquad (Mh, h)_H \geq m\|h\|_H^2$ *per ogni* $h \in H$,

(7) ${}_{V'}\langle Av, v\rangle_V, \; {}_{V'}\langle Bv, v\rangle_V \geq 2\alpha\|v\|_V^2 - \lambda_0\|v\|_H^2$ *per ogni* $v \in V$,

(8) $\gamma : V \to H$, *operatore nonlineare* demicontinuo *e tale che*

(9) $\|\gamma\|_(^2 v) H \leq C_1 + C_2\|v\|_V^2$ *per ogni* $v \in V$,

(10) $(\gamma(w) - \gamma(v), w - v)_H \geq -C_0\|w - v\|_H^2 - \alpha\|w - v\|_V^2$ *per ogni* $v, w \in V$.

Sia $J : V \to [0, +\infty]$ convessa, s.c.i. e propria. Detto $\partial_{V,V'}J(v)$ il suo sottodifferenziale nella dualità (V, V'), supponiamo che $0 \in D(\partial_{V,V'}J)$ e $0 \in \partial_{V,V'}J(0)$. Siano infine $\theta_0 \in H$ e $\chi_0 \in D(J)$. Esiste allora una terna di funzioni (θ, χ, w), tali che

(11) $\theta \in L^2(0, T; V) \cap C^0([0, T]; H), \qquad P\theta \in H^1(0, T; V') \cap C^0([0, T]; H)$,

(12) $\chi \in L^\infty(0, T; V) \cap H^1(0, T; H), \qquad w \in L^2(0, T; V')$,

(13) $(P\theta)' + \Lambda\chi' + A\theta = f$ *in* $V' \times (0, T)$,

(14) $M\chi' + B\chi + \partial_{V,V'}J(\chi) + \gamma(\chi) \ni L\theta$ *in* $V' \times (0, T)$,

(15) $\theta(0) = \theta_0, \qquad \chi(0) = \chi_0.$

Da un punto di vista matematico, la novità principale di questo risultato consiste nell'ambientazione rilassata del problema (ed in particolare dell'inclusione differenziale (14)) nella dualità (V, V'). Ciò permette di risolvere il sistema di phase-field sotto condizioni molto deboli sui dati. La dimostrazione del Teorema 1 si basa su tecniche di discretizzazione in tempo, sulla derivazione di stime a priori che consentano di vincere i termini nonlineari e su metodi di compattezza. Nella tesi si provano anche dei risultati di regolarità per il sistema (13-15), che non riportiamo.

3. – Il problema di trasmissione.

La principale applicazione del Teorema 1 è rivolta ad una particolare situazione fisica, in cui due materiali diversi, ma soggetti entrambi al modello di phase-field, sono situati all'interno delle regioni adiacenti Ω_1 e Ω_2 e possono trasmettersi il calore (e il parametro di fase) attraverso la superficie Γ che li divide. Una formulazione analitica di questo problema può essere ottenuta considerando ancora il sistema (1-2), ove però i coefficienti vengano supposti discontinui rispetto a Γ. Questa ipotesi naturale comporta un certo numero di difficoltà matematiche, che, tra l'altro, costringono a cercare una soluzione in forma più debole; di qui l'utilità del Teorema 1, che viene applicato con le scelte di $V = H^1(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$, ove $\Omega = \Omega_1 \cup \Gamma \cup \Omega_2$.

Tuttavia, da un punto di vista fisico, la soluzione così ottenuta non può essere considerata soddisfacente sul piano della regolarità. Si vorrebbero infatti interpretare almeno in senso puntuale le equazioni del modello e, in particolare, l'inclusione collegata al grafico multivoco α, o, meglio, ai diversi α_1 e α_2 riferiti alle due sostanze. Per ottenere questo tipo di regolarità, si devono aggiungere opportune condizioni «di compatibilità» [3] (α_1 ed α_2 «non troppo diversi»), ovvero «di crescita» (α_1 ed α_2 «di andamento controllato all'infinito»), che coprono comunque i casi più rilevanti per le applicazioni termodinamiche.

4. – Limiti singolari del modello.

Riferendosi per semplicità al sistema «concreto» (1-2), è stato osservato che, facendo variare opportunamente i parametri fisici in (2), il modello tende formalmente a certe situazioni termodinamiche più semplici. Nell'ultima parte della dissertazione, presento dunque un'analisi dettagliata dei modelli che possono essere ottenuti come *limiti singolari* del phase-field e delle relative questioni di convergenza. Tale analisi si dimostra particolarmente interessante nel caso del problema di trasmissione, ossia quando viene mantenuto fisso il comportamento della sostanza situata in Ω_1, mentre lo studio asintotico riguarda il solo dominio Ω_2. Da un punto di vista matematico, questo comporta diverse difficoltà, non solo di natura tecnica, connesse specialmente con la variazione delle condizioni sull'interfaccia Γ.

Mi limito qui a presentare con qualche dettaglio il caso in cui le equazioni in Ω_2 tendono al modello originario di Stefan. Nel risultato che segue, e che enuncio solo a grandi linee (vedi [4] per la trattazione completa), denoto con l'indice n i parametri e le soluzioni del problema approssimante ed il limite è inteso per $n \to \infty$. Sempre a livello di notazione, gli indici 1 e 2 indicano le restrizioni ai domini Ω_1 e Ω_2, e le funzioni $j_{i,n}$, $i = 1, 2$, sono le primitive di $\alpha_{i,n}$ tali che $j_{i,n}(0) = 0$.

TEOREMA 2. – *Supponiamo che*

(16) $\quad \mu_{2,n},\ \ \nu_{2,n},\ \ c_{2,n},\ \ c_{2,n}/\mu_{2,n} \to 0$ *per* $n \to \infty$,

(17) $\quad \alpha_{1,n}, \alpha_{2,n}$ *Lipschitziani per ogni* $n \in \mathbf{N}$,

(18) $\quad \lim_{n \to \infty} L_n\ \nu_{2,n}^{1/4} = 0$, *ove* L_n *è la costante di Lipschitz di* $\alpha_{2,n}$,

(19) $\quad \liminf_{|r| \to \infty} \dfrac{j_{2,n}(r)}{|r|^2} \geqslant m > 0$ *per ogni* $n \in \mathbf{N}$,

(20) *la successione* $j_{i,n}(r)$ è *nondecrescente in* n *per ogni* $r \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2$,

(21) $\mu_{2,n}^{1/2} \chi_{2,0,n} \to 0$ *e* $\nu_{2,n}^{1/2} \nabla \chi_{2,0,n} \to 0$ *fortemente in* $L^2(\Omega_2)$,

(22) $\chi_{1,0,n} \to \chi_{0,1}$ *fortemente in* $H^1(\Omega_1)$, *per qualche (dato)* $\chi_{0,1} \in H^1(\Omega_1)$,

(23) $\int_{\Omega_i} j_{i,n}(\chi_{i,0,n})\, dx \leq C$, $C > 0$ *assegnata*, *per* $i = 1, 2$ *e per ogni* $n \in \mathbf{N}$.

Esiste allora una coppia di funzioni (θ, χ), *che soddisfano il sistema*

(24) $(\varrho\theta + \lambda\chi)_t - \operatorname{div}(k\nabla\theta) = f$ *in senso variazionale*,

(25) $\lambda_1 \theta_1 \in \mu_1 (\chi_1)_t - \nu_1 \Delta \chi_1 + \alpha_1(\chi_1) - c_1 \chi_1$ *per q.o.* $(x, t) \in \Omega_1 \times (0, T)$,

(26) $\lambda_2 \theta_2(x) \in \alpha_2(\chi_2(x))$ *per q.o.* $(x, t) \in \Omega_2 \times (0, T)$,

(27) $\chi_1(0) = \chi_{0,1}$ *in* Ω_1, $\theta(0) = \theta_0$ *in* Ω,

(28) $\partial_{\mathbf{n}} \chi_1 = 0$ *su* $\partial\Omega_1$ *per q.o.* $t \in (0, T)$.

Inoltre, (θ_n, χ_n) *convergono a* (θ, χ) *in opportuni spazi funzionali.*

La difficoltà principale incontrata nella dimostrazione di questo risultato è connessa ancora una volta a questioni di regolarità; infatti, nel caso fisico, i grafici limite α_1 ed α_2 non soddisfano le ipotesi aggiuntive richieste per la risolubilità in senso puntuale del problema di trasmissione. Tuttavia, la diversa condizione (28) su Γ presente nel problema limite permette di ottenere comunque la regolarità desiderata, anche sotto le più generali condizioni su α_1 ed α_2. Nello studio asintotico, bisogna però bilanciare la velocità di crescita di $\alpha_{2,n}$, che può divergere, e il *blow-out* del parametro $\nu_{2,n}$, e questo spiega l'ipotesi (18). Inoltre, in quest'ottica, si rende necessaria una riscrittura del sistema approssimante in termini di operatori monotoni astratti. Il problema di convergenza così reimpostato viene quindi affrontato e risolto grazie all'uso di tecniche di Gamma-convergenza e di metodi di interpolazione finalizzati al controllo di certi termini superficiali su Γ.

BIBLIOGRAFIA

[1] CAGINALP G., *An analysis of a phase field model of a free boundary,* Arch. Rational Mech. Anal., **92** (1986), 205-245.

[2] DAMLAMIAN A., *Some results on the multi-phase Stefan problem,* Comm. Partial Differential Equations, **99** (1977), 1017-1044.

[3] SCHIMPERNA G., *Abstract approach to evolution equations of phase-field type and applications,* J. Differential Equations, **164** (2000), 395-430.

[4] SCHIMPERNA G., *Some convergence results for a class of nonlinear phase-field evolution equations,* J. Math. Anal. Appl. (2000), to appear.

Dipartimento di Matematica, Università di Pavia
e-mail: schimper@dragon.ian.pv.cnr.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Milano) - Ciclo XI
Direttore di ricerca: Prof. Gianni Gilardi, Università di Pavia