Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Maddalena Strianese

Prolungamento dellacurva integrale del sistema di equazioni differenziali sull'insieme singolare. Teoria e applicazioni

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.3, p. 403–406.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_3_403_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie 8, Vol. III-A, Dicembre 2000, 403-406

Prolungamento della curva integrale del sistema di equazioni differenziali sull'insieme singolare. Teoria e applicazioni.

MADDALENA STRIANESE

È noto che al centro della teoria qualitativa delle ODE non lineari e dei sistemi dinamici è lo studio delle traiettorie delle soluzioni, la ricerca dei *cicli* e dei punti di *equilibrio* e la relativa *stabilità.* Il problema trovato si può collocare tra i problemi sopra indicati, pur inaugurando, per la novità dell'approccio, una nuova branca di ricerca nel settore.

1. – Il problema. Risultati principali.

Sia

$$\|a_{ij}(x, y)\| \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \vdots \\ \dot{y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ \vdots \\ F_n(x, y) \end{pmatrix}, \dot{x}_i = y_i, \ i, j = 1, \cdots, n$$

F_i, $a_{ij} \in C^1$, $(x, y) \in M \subseteq \mathcal{R}^{2n}$, $t \in T \subseteq \mathcal{R}$ il sistema (lineare o no) di n equazioni differenziali del secondo ordine e sia $x = \varphi(t) \subseteq \mathcal{R}^n$ la soluzione, tale che la traiettoria $(\varphi(t), d\varphi(t)/dt) \in M$.

DEFINIZIONE 1. – *Denotiamo con* $S = \{(x, y) : \det \|a_{ij}(x, y)\| = 0\} \subseteq \mathcal{R}^{2n}$ *l'insieme singolare del sistema. I punti* $(x_0, y_0) \in S$ *li diciamo punti singolari.*

(Ovviamente $M \cap S = \emptyset$.)

DEFINIZIONE 2. – *Diciamo* $(x_{i0}, y_0) \in \mathcal{R}^{n+1}$ *il punto stazionario della funzione* $x_i(y) : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$ *se* $\partial x_i / \partial y_1 = \cdots = \partial x_i / \partial y_n = 0$ *in* $y = y_0$ *e* $x_{i0} = x_i(y_0)$. *L'insieme di tutti i punti stazionari di* $x_i(y)$ *lo denotiamo con* St_i.

Senza perdita di generalità, su M il sistema è riconducibile alla forma diagonale $a_i(x, y)\, \dot{y}_i = 1$, $y_i = \dot{x}_i$, $i = \{1, \ldots, n\}$. Sia S di misura nulla secondo Lebesgue e la traiettoria $[x(t) = \varphi(t), y(t) = d\varphi(t)/dt]$ del sistema sia definita su $M \backslash S$. Supponendo l'integrale primo $I(x, y) = C$ continuo con le sue derivate su $M \cup S$, è possibile definire il prolungamento della soluzione su S nel senso seguente [3, 4]:

DEFINIZIONE 3. – *La curva* $[x(t), y(t)]$ *è il prolungamento della traiettoria del sistema su* $M \cup S$ *via l'integrale* $I(x, y)$ *se* $x(t) = \varphi(t)$, $y(t) = d\varphi(t)/dt$ *per ogni* $t \in T$ *e* $I(x(t), y(t)) \equiv C$ *su* $M \cup S$.

Ovviamente tale prolungamento è possibile solo se l'intersezione $\mathcal{E} \cap S \neq \emptyset$, $\mathcal{E}: I(x, y) = C$. Il metodo poggia sul seguente teorema (valido anche per $n > 2$) [3, 4]:

TEOREMA 1. – *Siano* $I(x, y)$ *e* $G(x, y)$ *gli integrali primi del sistema per* $n = 2$ (in generale $I_i(x, y)$, $i = 1, \ldots, n$) *e* $\det(I, G)_x = I_{x_1} G_{x_2} - I_{x_2} G_{x_1} \neq 0$ *su* V, *allora per ogni* $x_i(y)$ *i punti stazionari appartengono a* $(S \cup Y) \cap V$ *e solo a* $(S \cup Y) \cap V$.

Inizialmente il problema è stato studiato nel caso $(x, y) \in \mathcal{R}^2$, cioè per il sistema autonomo di due equazioni differenziali con la curva integrale sul piano: $a(x, y)\, \dot{y} = 1$, $y = \dot{x}$, ove si è visto che $dx/dy = ya$ (*i.e.*, $St = S \cup Y$).

Dunque gli estremi locali di $x(y)$ possono esistere solo su $S \cup Y$. In questo caso particolare una classificazione di tutti i possibili prolungamenti a partire dai punti estremali è stata presentata.

E stato poi analizzato il caso più complicato del sistema di quattro equazioni differenziali in $\mathcal{R}^4$ $a_i(x, y)\dot{y}_i = 1$, $\dot{x}_i = y_i$, $i = 1, 2$. In questo caso $S = \{(x, y): a_1(x, y) \cdot a_2(x, y) = 0\}$ e il problema del prolungamento della traiettoria si riduce allo studio delle funzioni $x_i(y_1, y_2)$ definite dagli integrali primi I, G. Ma a differenza del caso precedente, dove $St = S \cup Y$, qui i punti stazionari possono esistere sull'intero insieme ($\cup St_i = S \cup Y$), oppure appartenere solo a qualche parte di S o Y, o non esistere ($\cup St_i \cap (S \cup Y) = \emptyset$). In questo caso, denotato $S_i = \{(x, y): a_i(x, y) = 0,\ a_j(x, y) \neq 0\}$ $i = \{1, 2\}$, $i \neq j$ e $S_0 = \{(x, y): a_1(x, y) = a_2(x, y) = 0\} \subseteq S$, si è provato, sotto certe condizioni sufficienti, che $St_i \subseteq S_0 \cup Y$ ove $S_0 = S_1 \cap S_2$ (*i.e.*, i punti stazionari sono più *rari* rispetto al piano).

2. – Problema della stabilità.

Relativamente al caso del sistema di due equazioni sul piano $\mathcal{R}^2$ $a(x, y)\, \dot{y} = 1$, $y = \dot{x}$, si è studiata la *stabilità del comportamento della traiettoria sull'insieme singolare* allorchè si passa da S al nuovo insieme singolare $S_\varepsilon = \{(x, y)$: $a(x, y) + \varepsilon = 0\}$, ottenuto perturbando a con un opportuno $|\varepsilon| > 0$ (cosiddetto *rumore* secondo Andronov). Ci si è limitati per semplicità al caso in cui $a(x, y)$ è un polinomio di grado $\leqslant 2$ [5]. Due tipi di stabilità sono stati studiati: la *stabilità topologica* quando il tipo di curva non cambia nel passaggio da S a S_ε e la *stabilità degli estremi locali* (*LE-stabilità*) quando la relativa disposizione degli estremi locali su S_ε coincide con quella su S [ovvero a massimi (minimi) corrispondono massimi (minimi)]. Si è visto che il comportamento di $x(y)$ su S è *sensibile* nel passaggio da S a S_ε, specialmente nel caso delle curve degeneri, come segue dal seguente

TEOREMA 2. – 1) *Ogni retta diversa da* $y = 0$ *è stabile in ambo i sensi.* $y = 0$ *è solo topologicalmente stabile.*

2) *Ogni retta doppia è topologicalmente instabile. Inoltre è LE instabile tranne nel caso della retta doppia* $(x - b)^2 = 0$.

3) *Due rette parallele sono sempre stabili topologicalmente. Sono inoltre LE-stabili tranne quando una delle due coincide con* $y = 0$.

4) *Due rette intersecantisi sono topologicamente instabili. Se una delle due coincide con* $y = 0$ *o con* $x = 0$, *si ha LE-instabilità.*

Si è inoltre provato che la stabilità o meno dipende non solo da $a(x, y)$ ma dal segno di ε e dalla disposizione della curva sul piano. La *LE-stabilità* è stata studiata *localmente* in alcuni esempi nel caso di $a(x, y) \in C^3$ (tale che si possa approssimare localmente con un polinomio di ordine ≤ 2). Tali esempi danno la speranza di ridurre il problema della stabilità allo studio locale [5].

3. – Applicazioni.

• Sostituendo la Lagrangiana classica invariante rispetto al gruppo di Galilei con quella postgalileiana (invariante rispetto al gruppo di Poincaré e singolare su particolari sottovarietà), si ottengono le equazioni singolari di Euler-Lagrange. Di conseguenza è stata esaminata la dinamica del sistema di particelle quando la traiettoria raggiunge l'insieme singolare S (ove l'Hessiano degenera). Il cosiddetto *raggio elettronico* può essere interpretato come il minimo locale della distanza $r(v)$, $v \in \mathcal{R}^6$, tra le particelle che raggiungono S; v è la velocità dello spazio delle fasi. Un diverso comportamento si può rilevare nel caso della coppia elettrone-elettrone e elettrone-positrone [1].

• L'irreversibilità del moto classico per le molecole di un gas raro soddisfacente la relazione sperimentale $|\Phi(r)'| \gg |\Phi(r)r|$ (Φ è il potenziale classico) segue dalla perdita di unicità delle traiettorie sull'insieme singolare. Di conseguenza, la distribuzione delle velocità delle molecole con probabilità 1 tende alla legge normale ce^{-av^2}, $v \in \mathcal{R}^{3n}$, e *il tempo di rilassamento* coincide con il tempo medio tra due urti successivi [2].

BIBLIOGRAFIA

[1] E. LASERRA, I.P. PAVLOTSKY, M. STRIANESE, *Radius of electron as a consequence of Poincaré group,* Physica A, **219** (1995), 141-158.
[2] I.P. PAVLOTSKY, M. STRIANESE, *Irreversibility in Classical Mechanics as a consequence of Poincaré group,* Int. J. Mod. Phys. B, **10**, n. 21 (1996), 2675-2685.

[3] I.P. PAVLOTSKY, M. STRIANESE, R. TOSCANO, *Prolongation of Solution of the Differential Equations on the Singular Set*, Differenzialnye Uravnenia, **34**, n. 3 (1998), 313-319.

[4] I.P. PAVLOTSKY, M. STRIANESE, R. TOSCANO, *Prolongation of the Integral Curve on the Singular Set via the First Integral*, J. of Interdisciplinary Mathematics, **2**, nn. 2-3 (1999), 101-119.

[5] I.P. PAVLOTSKY, M. STRIANESE, *On the Stability of the Singular Set of Dynamical System*, Differenzialnye Uravnenia, **35**, n. 3 (1999), 296-303.

Dipartimento di Ingegneria, Seconda Università di Napoli, Aversa (CE)
e-mail: madstri@tin.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Dipartimento di Matematica e Applicazioni «R.Caccioppoli», Università di Napoli) - Ciclo XI
Direttore di ricerca: Prof. I.P.Pavlotsky,
Seconda Università di Napoli, Dip. di Ingegneria, Aversa (CE)