Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Cristina Trombetti

Rilassamento e fenomeno di Lavrentiev per alcune classi di funzionali integrali

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.3, p. 411–413.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_3_411_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie 8, Vol. III-A, Dicembre 2000, 411-413

Rilassamento e fenomeno di Lavrentiev per alcune classi di funzionali integrali.

CRISTINA TROMBETTI

Si consideri uno spazio topologico $(\mathcal{U}, \tau)$ soddifacente il primo assioma di numerabilità, X un sottoinsieme τ-denso di $\mathcal{U}$ ed F un funzionale su X.

È ben noto che i metodi diretti del Calcolo delle Variazioni assicurano l'esistenza di minimi del funzionale F in X se sono soddisfatte opportune ipotesi di semicontinuità e di coercività. Poiché in generale tali ipotesi non sono soddisfatte, può essere interessante studiare il comportamento delle successioni minimizzanti caratterizzando i loro limiti come minimi di un funzionale detto funzionale rilassato di F. Tale funzionale è definito su tutto $\mathcal{U}$ nel modo seguente:

$$\mathrm{sc}^- F(u) = \inf\left\{\liminf_h F(u_h) : (u_h)_h \subseteq X,\ u_h \to u\right\}.$$

Spesso il funzionale F è di tipo integrale, cioè:

$$F(u) = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x))\, dx \tag{1}$$

dove Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$, u è una funzione abbastanza regolare e $f(= f(x, s, z))$ è un'integranda che soddisfa opportune ipotesi. Come già osservato può accadere che F non sia semicontinuo inferiormente ed è quindi interessante studiare le proprietà di $\mathrm{sc}^- F$. In particolare ci si può chiedere quando $\mathrm{sc}^- F$ è anch'esso un fuzionale integrale.

Uno dei risultati principali in questa direzione è stato ottenuto da Goffman e Serrin nel 1964 (cfr. [4]). Essi provano un risultato di rappresentazione integrale, sullo spazio delle funzioni a variazione limitata $BV(\Omega)$, per il rilassato di un funzionale come quello in (1) nel caso in cui f dipende solo da z.

In questa tesi si considerano funzionali del tipo di quelli considerati da Goffman e Serrin e si ottiene un risultato di rappresentazione integrale in alcuni casi in cui l'integranda f dipende anche da x.

Più precisamente (cfr. [6]) si considera $f : (x, z) \in \Omega \times \mathbb{R}^N \to [0, +\infty[$ continua, ma non necessariamente uniformemente continua, rispetto ad x e convessa in z e si prova che se $u \in BV_{loc}(\Omega)$ allora:

$$\int_\Omega f(x, \nabla u)\, dx + \int_\Omega f^\infty\left(x, \frac{dD^s u}{d|D^s u|}\right) d|D^s u| =$$

$$= \inf\left\{ \liminf_h \int_\Omega f(x, \nabla u_h)\, dx : u_h \in C^1(\Omega)\ \forall h \in \mathbf{N},\ u_h \to u \text{ in } L^1_{loc}(\Omega) \right\}$$

dove ∇u è la densità della misura Du rispetto alla misura di Lebesgue, $D^s u$ è la parte singolare della misura Du rispetto alla misura di Lebesgue e $\frac{dD^s u}{d|D^s u|}$ è la derivata di Radon-Nikodim della misura $D^s u$ rispetto alla sua variazione totale $|D^s u|$.

Si considerano anche problemi di rilassamento di funzionali definiti su spazi di funzioni con vincoli di traccia (cfr. [2], [3]). Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$ a frontiera Lipschitziana, $f : \mathbb{R}^N \to [0, +\infty[$ una funzione convessa e u_0 una funzione di $W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Si considera $\mathcal{U} = BV(\Omega)$, $X = u_0 + C_0^\infty(\Omega)$ ed F uguale al funzionale:

$$u \in BV(\Omega) \to \begin{cases} \int_\Omega f(\nabla u)\, dx & \text{if } u \in u_0 + C_0^\infty(\Omega) \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e si prova, senza condizioni di crescita su f che, per ogni $u \in BV(\Omega)$,

$$\int_\Omega f(\nabla u)\, dx + \int_\Omega f^\infty\left(\frac{dD^s u}{d|D^s u|}\right) d|D^s u| + \int_{\partial\Omega} f^\infty((u_0 - u)\,\mathbf{n})\, d\mathcal{H}^{n-1} = \tag{2}$$

$$= \inf\left\{ \liminf_h \int_\Omega f(\nabla u_h)\, dx\ \ u_h \in u_0 + C_0^\infty(\Omega),\ u_h \to u \text{ in } L^1(\Omega) \right\}.$$

Le scelta di X ovviamente non è unica; allora ci si può chiedere cosa accade se si cambia lo spazio X. Questo è, in un qualche senso, legato al fenomeno di Lavrentiev.

Si ricorda che (cfr. [1], [5]), dato uno spazio topologico $(\mathcal{U}, \tau)$, un sottoinsieme τ denso V di $\mathcal{U}$ ed un funzionale

$$F : \mathcal{U} \to]-\infty, +\infty], \qquad \tau-\text{s.c.i.},$$

c'è fenomeno di Lavrentiev per il funzionale F tra $\mathcal{U}$ e V se

$$\inf_{\mathcal{U}} F < \inf_V F.$$

Indicato con

$$F(\Omega, \varphi_0, \cdot) : u \in BV(\Omega) \mapsto \int_\Omega f(\nabla u)\, dx + \int_\Omega f^\infty\left(\frac{dD^s u}{d|D^s u|}\right) d|D^s u| + \tag{3}$$

$$+ \int_{\partial\Omega} f^\infty((\varphi_0 - u)\,\mathbf{n})\, d\mathcal{H}^{N-1},$$

(φ_0 è la traccia di u_0 sulla frontiera) dalla (2) si deduce che

$$\inf_{u \in BV(\Omega)} F(\Omega, \varphi_0, u) = \inf_{u_0 + C_0^\infty(\Omega)} F(\Omega, \varphi_0, u)$$

e dunque che non c'è fenomeno di Lavrentiev per F tra $BV(\Omega)$ e $u_0 + C_0^\infty(\Omega)$.

Scelta $\varphi_0 \in L^1(\partial\Omega)$ il funzionale definito nella (3) è definito su uno spazio di funzioni che non ha vincoli di traccia. Questo suggerisce di studiare se c'è fenomeno di Lavrentiev per $F(\Omega, \varphi_0, \cdot)$, tra lo spazio $BV(\Omega)$ ed un sottoinsieme denso di funzioni regolari che non abbiano tracce fissate, per esempio $BV(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$.

Si prova anche che

$$\inf\{F(\Omega, \varphi_0, u): u \in BV(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)\} = \inf\{F(\Omega, \varphi_0, u): u \in BV(\Omega)\} < +\infty$$

se e solo se

$$\inf\{F(\Omega, \varphi_0, v): v \in BV(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega)\} < +\infty .$$

Come corollario si ottiene che c'è fenomeno di Lavrentiev per $F(\Omega, \varphi_0, \cdot)$, tra $BV(\Omega)$ and $BV(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ se e solo se $\inf\{F(\Omega, \varphi_0, v): v \in BV(\Omega)\} < +\infty$ e $\inf\{F(\Omega, \varphi_0, v): v \in BV(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)\} = +\infty$.

BIBLIOGRAFIA

[1] BUTTAZZO G., MIZEL V.J., *Interpretation of the Lavrentiev Phenomenon by Relaxation,* J. Funct. Anal., **110** (1992), 434-460.

[2] DE ARCANGELIS R., TROMBETTI C., *On the Relaxation of Some Classes of Dirichlet Minimum Problems,* Comm. Partial Differential Equations, **24** (1999), 975-1006.

[3] DE ARCANGELIS R., TROMBETTI C., *On the Lavrentieff Phenomenon for Some Classes of Dirichlet Minimum Problems,* in corso di stampa su J. Convex Anal.

[4] GOFFMAN C., SERRIN J., *Sublinear Functions of Measures and Variational Integrals,* Duke Math. J., **31** (1964), 159-178.

[5] LAVRENTIEV M., *Sur Quelques Problèmes du Calcul des Variations,* Ann. di Mat. (Ann. Mat. Pura Appl.), 4 (1926), 7-28.

[6] TROMBETTI C., *On the Lower Semicontinuity and Relaxation Properties of Certain Classes of Variational Integrals,* Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat., **115** (1997), 25-51.

Dipartimento di Matematica e Applicazioni «R. Caccioppoli»
Università degli sudi di Napoli «Federico II»
e-mail:cristina@matna2.dma.unina.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Napoli) - Ciclo XI
Direttore di ricerca: Prof. Riccardo De Arcangelis
Università degli studi di Napoli «Federico II»