Bollettino Unione Matematica Italiana

Alessandra Lunardi

Problemi parabolici a frontiera libera

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-B** (2000), n.1, p. 11–29.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3B_1_11_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
(8) **1**-B (2000), 11-29

Problemi parabolici a frontiera libera.

ALESSANDRA LUNARDI (*)

1. – Introduzione.

Parlerò di una classe di problemi a frontiera libera, motivati soprattutto da modelli matematici in teoria della combustione, e consistenti in una equazione differenziale (o un sistema di equazioni differenziali) a derivate parziali di tipo parabolico, che deve essere verificata in un dominio incognito. Per fissare le idee, considererò problemi del tipo

$$(1.1)\qquad \begin{cases} u_t(t,\,\eta) = \Delta u(t,\,\eta) + f(u(t,\,\eta),\, Du(t,\,\eta)), & t \geq 0, \quad \eta \in \Omega_t, \\ u(t,\,\eta) = g_1(\eta), & t \geq 0, \quad \eta \in \partial\Omega_t, \\ \dfrac{\partial}{\partial \nu} u(t,\,\eta) = g_2(\eta), & t \geq 0, \quad \eta \in \partial\Omega_t, \end{cases}$$

dove Δ è il Laplaciano rispetto alle variabili spaziali η, $Du = (u_{\eta_1}, \ldots, u_{\eta_n})$ indica il gradiente spaziale, e $\partial/\partial\nu$ è la derivata normale sulla frontiera $\partial\Omega_t$.

Le incognite sono la famiglia di aperti di $\mathbb{R}^n$ $\{\Omega_t : t > 0\}$ e la funzione u, definita per $t \geq 0$ e $\eta \in \overline{\Omega_t}$, i dati sono le funzioni f, g_1, g_2 e i dati iniziali

$$\Omega_0, \qquad u(0,\,\cdot) : \Omega_0 \mapsto \mathbb{R}\,.$$

Osserviamo che le condizioni al bordo sono due invece che una sola come nei casi di frontiera fissa; la cosa è ragionevole dato che c'è un'incognita in piú, la famiglia $\{\Omega_t\}$.

Per questi come per vari altri problemi a frontiera libera, la letteratura è molto ricca nel caso che la variabile η sia unidimensionale: vedi per es. [15], [17]. Invece, nel caso $n > 1$ sono molti di piú i problemi aperti rispetto a quelli

(*) Conferenza tenuta a Napoli il 16 settembre 1999 in occasione del XVI Congresso U.M.I.

chiariti, anche per quanto riguarda le questioni piú elementari, come ad esempio esistenza e unicità della soluzione.

In questa conferenza parlerò essenzialmente del caso multidimensionale, esponendo un metodo, sviluppato in collaborazione con C.-M. Brauner e altri autori, che permette di studiare in dettaglio problemi di stabilità e comportamento asintotico, e che fornisce soluzioni regolari.

Come primo passo si trasforma Ω_t in un dominio fisso Ω con un opportuno cambiamento di coordinate. Il prezzo che si paga per ridurre il problema ad uno a frontiera fissa è piuttosto alto: in generale l'equazione risultante è particolarmente complicata; nel migliore dei casi si riesce a eliminare una delle due incognite, generalmente la frontiera incognita, esprimendola in funzione dell'altra, ma si ottiene un problema parabolico *completamente nonlineare*, ovvero un problema in cui le nonlinearità coinvolgono le derivate di ordine 2 (cioè quelle di ordine massimo) della funzione incognita rimasta, che qui compaiono anche in forma non locale, ossia tramite le loro tracce sulla frontiera. Affinché questo procedimento funzioni ci sarà comunque bisogno di una condizione di trasversalità che nel problema (1.1) è data da

$$g_2(\eta) \neq \frac{\partial g_1}{\partial \nu}(\eta), \qquad \eta \in \partial\Omega_0. \tag{1.2}$$

I problemi parabolici completamente nonlineari sono stati studiati principalmente negli ultimi venti anni; fra i risultati piú noti vorrei ricordare in particolare i lavori di Krylov [21] sull'esistenza globale nel tempo di soluzioni, quelli di Crandall, Ishii e P.L. Lions [14] sulle cosiddette soluzioni di viscosità per equazioni del secondo ordine, e l'articolo pionieristico di Da Prato e Grisvard [16], che sono stati i primi a impostare problemi completamente nonlineari come equazioni di evoluzione in spazi di Banach.

Al momento attuale la teoria è abbastanza avanzata per quanto riguarda l'esistenza e unicità locale nel tempo di soluzioni regolari e proprietà geometriche delle soluzioni, come stabilità e instabilità di soluzioni stazionarie o periodiche rispetto al tempo, varietà invarianti vicine a soluzioni stazionarie, biforcazione eccetera. Si veda ad es. la monografia [22], le cui tecniche sono abbastanza duttili da poter essere adattate alla nostra situazione; in particolare, nel caso di domini illimitati, si adattano allo studio del comportamento delle soluzioni per dati iniziali vicini a onde viaggianti.

Per spiegare come fissando la frontiera si ottenga «naturalmente» un'equazione completamente nonlineare, e per far vedere quali sono i problemi che si incontrano e come si affrontano, comincerò da un semplice esempio in dimensione $n = 1$. Questo esempio si può trattare in vari modi, ma illustrerò solo quello che è estendibile al caso multidimensionale.

2. – Un esempio semplice.

Consideriamo il problema

$$\left\{\begin{array}{l} u_t(t,\eta) = u_{\eta\eta}(t,\eta), \qquad t \geqslant 0, \qquad \eta < \xi(t), \\ u(t,\xi(t)) = 1, \qquad u_\eta(t,\xi(t)) = 1, \qquad t \geqslant 0, \\ u(t,-\infty) = 0, \qquad t \geqslant 0, \end{array}\right. \tag{2.1}$$

con dati iniziali

$$\xi(0) = \xi_0, \qquad u(0,\eta) = u_0(\eta), \qquad \eta \leqslant \xi_0. \tag{2.2}$$

Qui si ha $\Omega_t = (-\infty, \xi(t))$. La condizione di trasversalità (1.2) in questo caso è $u_\eta(t,\xi(t)) = 1 \neq 0$.

Si vede subito che (2.1) non ha soluzioni stazionarie; le soluzioni piú semplici sono le onde viaggianti, cioè soluzioni del tipo $(\overline{\xi}, \overline{u})$ dove

$$\overline{\xi}(t) = ct + c_1, \qquad \overline{u}(t,\eta) = U_0(\eta - \overline{\xi}(t)). \tag{2.3}$$

Imponendo che $(\overline{\xi}, \overline{u})$ sia soluzione si trova facilmente $c = -1$, $U_0(x) = e^x$. Quindi la soluzione onda è unica, a meno di traslazioni.

Il cambiamento di variabili che fissa in modo ovvio la frontiera è

$$x = \eta - \xi(t),$$

che trasforma il fronte $\eta = \xi(t)$ in $x = 0$. Chiamiamo $\tilde{u}$ la funzione u nelle nuove variabili, ossia poniamo $\tilde{u}(t,x) = u(t,\eta)$. Il problema per $\tilde{u}$ è allora

$$\left\{\begin{array}{l} \tilde{u}_t(t,x) - \dot{\xi}(t)\,\tilde{u}_x(t,x) = \tilde{u}_{xx}(t,x), \quad t \geqslant 0,\ x \leqslant 0, \\ \tilde{u}(t,0) = 1, \qquad \tilde{u}_x(t,0) = 1, \quad t \geqslant 0, \\ \tilde{u}(t,-\infty) = 0, \quad t \geqslant 0. \end{array}\right. \tag{2.4}$$

A questo punto il sistema può essere immediatamente disaccoppiato usando le condizioni al bordo: la $u(t,\xi(t)) \equiv 1$ fornisce, derivando rispetto a t, $u_t(t,\xi(t)) + \dot{\xi}(t)\,u_x(t,\xi(t)) \equiv 0$, e dato che $u_x(t,\xi(t)) \neq 0$ si ricava $\dot{\xi}(t) = -u_t(t,\xi(t)) = -u_{\eta\eta}(t,\xi(t)) = -\tilde{u}_{xx}(t,0)$. Sostituendo in (2.4) si ottiene l'equazione

$$\tilde{u}_t(t,x) = \tilde{u}_{xx}(t,0)\,\tilde{u}_x(t,x) + \tilde{u}_{xx}(t,x)$$

in cui la parte nonlineare è del tipo menzionato nell'introduzione, dato che contiene la derivata seconda spaziale della soluzione, calcolata sulla frontiera ossia per $x = 0$.

In realtà questo disaccoppiamento funziona solo in dimensione 1, perché in dimensione $n > 1$ il fronte ξ dipenderà non solo dal tempo ma anche da altre variabili spaziali, nell'equazione per $\tilde{u}$ compariranno anche derivate spaziali di ordine 1 e 2 di ξ, e sostituendo come sopra si otterranno fra l'altro termini del tipo $\int_0^t D^4 \tilde{u}(s, 0, \cdot)\, ds$, difficilmente trattabili (D^4 indica una qualunque derivata spaziale di ordine 4). Il sistema va disaccoppiato in un modo piú intelligente, cercando di esprimere ξ, invece di $\dot{\xi}$, in funzione dell'altra incognita. Per fare questo introduciamo le perturbazioni della soluzione onda (quella con $c_1 = 0$, tanto per fissare le idee),

$$s(t) = \xi(t) + t\,, \quad v(t, x) = \tilde{u}(t, x) - U_0(x) \tag{2.5}$$

e scriviamo v come

$$v(t, x) = s(t)\, U_0'(x) + w(t, x)\,. \tag{2.6}$$

Le nuove incognite saranno s e w. La definizione di w può sembrare bizzarra a prima vista; ma se pensiamo allo sviluppo di Taylor della soluzione onda:

$$U_0(\eta + t) = U_0(x + \xi(t) + t) = U_0(x) + U_0'(x)(\xi(t) + t) + \text{Resto}\,,$$

e scriviamo, in modo analogo,

$$u(t, \eta) = \tilde{u}(t, x) = U_0(x) + U_0'(x)(\xi(t) + t) + w(t, x)\,,$$

otteniamo esattamente la (2.6).

Le condizioni al bordo permettono ancora di disaccoppiare il sistema: infatti scrivendo la (2.6) per $x = 0$ e tenendo conto del fatto che $U_0(0) = 1$, $U_0'(0) = 1$ si ottiene

$$s(t) = -w(t, 0)\,. \tag{2.7}$$

Sostituendo nella condizione al bordo $\tilde{u}_x(t, 0) = 1$ e nell'equazione differenziale per $\tilde{u}$ si ottiene

$$w_x(t, 0) - w(t, 0) = 0\,,$$

$$w_t(t, x) = -w_t(t, 0)(-w(t, 0)\, U_0''(x) + w_x(t, x)) + w_{xx}(t, x) - w_x(t, x)\,.$$

Nell'equazione per w compare ancora $w_t(t, 0)$ nel membro destro, ma si elimina facilmente scrivendo l'equazione per $x = 0$ e ricavando

$$w_t(t, 0) = w_{xx}(t, 0) - w_x(t, 0)\,.$$

Abbiamo così ottenuto un problema per la sola incognita w,

$$\begin{cases} w_t = \mathcal{L}w + \mathcal{F}(w, w_x, w_{xx})\,, & t \geqslant 0\,,\ x \leqslant 0\,, \\ \mathcal{B}w = 0\,, \quad t \geqslant 0\,,\ x = 0\,, \\ w(t, -\infty) = 0\,, \quad t \geqslant 0\,, \end{cases} \tag{2.8}$$

con dato iniziale

$$w(0, x) = w_0(x), \qquad x \leqslant 0, \tag{2.9}$$

essendo

$$w_0(x) = u_0(x) - U_0(x) - \xi(0)\, U_0'(x), \qquad x \leqslant 0.$$

Gli operatori differenziali lineari $\mathcal{L}$ e $\mathcal{B}$ operano solo sulla variabile spaziale x, e sono

$$(\mathcal{L}v)(x) = v''(x) - v'(x), \qquad x \leqslant 0, \qquad \mathcal{B}v = v'(0) - v(0),$$

mentre la funzione nonlineare $\mathcal{F}$ è data da

$$\mathcal{F}(v, v', v'')(x) = -(v''(0) - v'(0))(-v(0)\, U_0''(x) + v'(x)), \qquad x \leqslant 0.$$

Osserviamo che tutti i passaggi fatti finora sono reversibili: se risolviamo (2.8)-(2.9) possiamo ricavare $s(t) = -w(t, 0)$ e quindi $\tilde{u} = U_0 + sU_0' + w$, risolvendo così il problema (2.1)-(2.2). Inoltre la soluzione nulla di (2.8) corrisponde alla soluzione ($\xi = -t, \tilde{u} = U_0$) di (2.4) ossia alla soluzione onda di (2.1), e la stabilità della soluzione nulla di (2.8) corrisponde alla stabilità della soluzione onda di (2.1).

La stabilità è intesa rispetto a opportune perturbazioni: fissato uno spazio di Banach Y di possibili dati iniziali, si dice che la soluzione nulla è stabile in Y se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $r > 0$ tale che per ogni dato iniziale $w_0 \in Y$ con $\|w_0\|_Y \leqslant r$, la soluzione w di (2.8)-(2.9) esiste globalmente e per ogni $t \geqslant 0$ la funzione $w(t, \cdot)$ è in Y ed ha norma $\leqslant \varepsilon$.

Il problema (2.8) rientra nella teoria dei problemi parabolici completamente nonlineari.

Qui faccio una piccola parentesi su cosa si intende per «problema parabolico». La tradizionale classificazione delle equazioni differenziali in ellittiche, paraboliche e iperboliche va benissimo per equazioni lineari di tipo locale, ma i nostri problemi sono non lineari e non locali. Una definizione naturale, e comunemente usata, di parabolicità per l'equazione $u_t(t, x) = \Phi(u(t, x), Du(t, x), D^2u(t, x))$, se la funzione $\Phi(u, p, q)$ è abbastanza regolare, è la seguente: data u regolare, il problema è parabolico vicino a u se la parte lineare del secondo membro in u, cioè l'operatore

$$w \mapsto \Phi_u(u, Du, D^2u)\, w + \sum_{i=1}^{n} \Phi_{p_i}(u, Du, D^2u)\, D_i w + \sum_{i,j=1}^{n} \Phi_{q_{ij}}(u, Du, D^2u)\, D_{ij} w$$

è ellittico. Nel nostro caso però il secondo membro è di tipo non locale, e in generale lo sarà anche la sua parte lineare: per esempio nel problema (2.8) la parte lineare di $\mathcal{L}w + \mathcal{F}(w, w_x, w_{xx})$ vicino a un fissato dato iniziale u_0 è l'operatore

$$w \mapsto \mathcal{A}w = \mathcal{L}w - (w''(0) - w'(0))(u_0(0)\, U_0''(x) + u_0'(x))$$
$$- (u_0''(0) - u_0'(0))(w(0)\, U_0''(x) + w'(x))\,.$$

In particolare se $u_0 = 0$ si ottiene $\mathcal{A} = \mathcal{L}$, che è un operatore ellittico. Per $u_0 \neq 0$, l'operatore $\mathcal{A}$, pur non essendo in generale un operatore ellittico propriamente detto, ha proprietà simili a quelle degli operatori ellittici. Dal punto di vista tecnico la proprietà essenziale di $\mathcal{A}$ è che la sua realizzazione in vari spazi funzionali (spazi di funzioni continue o hölderiane su $(-\infty, 0])$ con le opportune condizioni al bordo, genera un semigruppo analitico. La teoria dei semigruppi analitici, per la quale rimando alle monografie [2], [22], è attualmente molto ben sviluppata e duttile, nel senso che si adatta a svariate situazioni oltre che ai problemi parabolici di tipo classico.

Possiamo allora dire che il problema $u_t = \Psi(u, Du, D^2)$ è di tipo parabolico (vicino a u_0) se la parte lineare del secondo membro in u_0 genera un semigruppo analitico nello spazio funzionale dove si ambienta il problema. Per questa classe di problemi si dimostrano facilmente risultati di esistenza e unicità locale della soluzione, e di dipendenza dai dati. Inoltre si studiano bene proprietà geometriche delle soluzioni: stabilità, biforcazione, orbite periodiche, varietà invarianti, etc. Vedi [19] per problemi semilineari e [22] per problemi completamente nonlineari.

Nel caso di (2.8) e delle sue generalizzazioni, l'ambiente naturale è quello delle funzioni hölderiane: fissato $\alpha \in (0, 1)$ si ottiene un'unica soluzione w nello spazio $C^{1+\alpha/2, 2+\alpha}([0, T] \times (-\infty, 0])$ (purché ovviamente $w_0 \in C^{2+\alpha}((-\infty, 0])$, $\mathcal{B}w_0 = 0$, e $\lim_{x \to -\infty} w_0(x) = 0$), con $T > 0$ dipendente da w_0 (1).

Vale anche il principio della stabilità linearizzata, in una forma molto simile al teorema di Lyapunov per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie: se lo spettro della realizzazione dell'operatore $\mathcal{L}$ (con le opportune condizioni al bordo) nello spazio funzionale dove si ambienta il problema è costituito tutto da elementi con parte reale negativa, allora la soluzione nulla è (esponenzialmente) stabile; se lo spettro ha elementi con parte reale positiva, la soluzione nulla è instabile.

La realizzazione L di $\mathcal{L}$ in spazi α-hölderiani è data da

$$L : \{v \in C^{2+\alpha}((-\infty, 0]) : \mathcal{B}v = 0\} \mapsto C^{\alpha}((-\infty, 0])\,; \qquad Lv = \mathcal{L}v$$

(1) Lo spazio $C^{1+\alpha/2, 2+\alpha}([0, T] \times (-\infty, 0])$ è costituito dalle funzioni limitate w aventi derivate w_t, w_{xx} limitate e tali che

$$\sup_{t \neq s \in [0, T],\ x \neq y \in (-\infty, 0]} \left(\frac{|w_t(t, x) - w_t(s, y)|}{|t - s|^{\alpha/2} + |x - y|^{\alpha}} + \frac{|w_{xx}(t, x) - w_{xx}(s, y)|}{|t - s|^{\alpha/2} + |x - y|^{\alpha}} \right) < \infty\,.$$

ed ha brutte proprietà spettrali: come si verifica facilmente, lo spettro di L è costituito dalla regione $\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,\lambda \leqslant -(\mathrm{Im}\,\lambda)^2\}$ quindi non solo gli elementi dello spettro non hanno tutti parte reale negativa, ma 0 è punto di accumulazione per lo spettro. Questa è una difficoltà che si incontra tipicamente in spazi di funzioni definite su domini illimitati (nel nostro caso, la semiretta $(-\infty, 0]$), e che preclude l'uso di ogni tipo di teorema di stabilità linearizzata.

Per superare questa difficoltà si ambienta il problema in spazi con peso, dove le proprietà spettrali della realizzazione di $\mathcal{L}$ sono molto migliori se il peso è scelto opportunamente. Questo è un fatto ben noto: si veda ad es. la discussione negli articoli di Sattinger [24], [25].

Nel nostro caso scegliendo come spazio ambiente

$$X = \{v : (-\infty, 0] \mapsto \mathbb{R} : x \mapsto e^{-x/2} v(x) \in C^{\alpha}((-\infty, 0])\},$$

la realizzazione L di $\mathcal{L}$ in X è data da

$$L : D(L) = \{v \in C^{2+\alpha}((-\infty, 0]) : v,\ v'\, v'' \in X,\ \mathcal{B}v = 0,\} \mapsto X; \qquad Lv = \mathcal{L}v$$

e si dimostra che genera un semigruppo analitico. Il problema è ben posto anche in questi spazi, nel senso che per ogni $w_0 \in D(L)$ esiste $T > 0$ e un'unica soluzione w di (2.11)-(2.12) tale che $(t, x) \mapsto e^{-x/2} w(t, x) \in C^{1+\alpha/2, 2+\alpha}([0, T] \times (-\infty, 0])$.

Inoltre lo spettro di L è $(-\infty, -1/4] \cup \{0\}$, dove 0 è un autovalore semplice, dovuto all'invarianza per traslazioni del problema originario; si vede facilmente che il kernel di L è generato dalla derivata U_0' della soluzione onda. La proiezione spettrale sul kernel è

$$Pv(x) = \int_{-\infty}^{0} v(\sigma)\, d\sigma\, U_0'(x), \qquad v \in X,\ x \leqslant 0.$$

Essendo $P\mathcal{F}(v, v', v'') = 0$ per ogni $v \in D(L)$, l'equazione soddisfatta da Pw è semplicemente $(Pw)_t \equiv 0$ e quindi $Pw \equiv Pw_0$; inoltre $(I-P)w$ soddisferà

$$\text{(2.10)} \quad \begin{cases} ((I-P)\,w)_t = (I-P)\,Lw + (I-P)\,\mathcal{F}(w, w_x, w_{xx}) \\ \quad = L(I-P)\,w + \mathcal{F}((I-P)\,w, ((I-P)\,w)_x, ((I-P)\,w)_{xx}), \\ t \geqslant 0,\ x \leqslant 0, \\ \mathcal{B}w = 0,\ t \geqslant 0,\ x = 0, \\ ((I-P)\,w)(0, x) = (I-P)\,w_0(x), \qquad x \leqslant 0, \end{cases}$$

Il problema (2.10) è ambientato in $(I-P)(X)$, dove lo spettro di L consiste della sola semiretta $(-\infty, -1/4]$ e ad esso si applica il Principio della Stabilità Linearizzata: se $(I-P)\,w_0$ è sufficientemente piccolo (nella norma del dominio di L, ossia nello spazio $C^{2+\alpha}$ con peso) allora la soluzione di (2.10) esiste globalmente e $w(t,\cdot)$ tende a 0 esponenzialmente per $t\to+\infty$, nella norma $C^{2+\alpha}$ con peso. Ne segue che $w = Pw + (I-P)w$ tende esponenzialmente a Pw_0 per $t\to+\infty$, e quindi

$$\lim_{t\to\infty} s(t) = \lim_{t\to\infty} -w(t,0) = -(Pw_0)(0),$$

ovvero, per $t\to\infty$, $\xi(t)\simeq -t+t_0$, essendo

$$t_0 = -(Pw_0)(0) = \xi(0) - \int_{-\infty}^{0} (u_0(\sigma) - U_0(\sigma))\, d\sigma,$$

e $u(t,\eta)\simeq U_0(\eta-\xi(t))\simeq U_0(\eta+t-t_0)$. La soluzione di (2.1) tende quindi esponenzialmente a una funzione della famiglia (2.3). Si dice che l'onda è orbitalmente stabile.

3. – Stabilità di onde in problemi multidimensionali a due fasi.

Il metodo descritto nel paragrafo precedente si applica a anche a problemi a due fasi multidimensionali. Consideriamo qui un problema in un cilindro n-dimensionale, espresso come $\mathbb{R}\times\mathcal{O}$, dove $\mathcal{O}$ è un aperto limitato di $\mathbb{R}^{n-1}$ con frontiera regolare.

$$(3.1)\qquad \begin{cases} u_t(t,\eta,y) = \Delta u(t,\eta,y) + u(t,\eta,y)\, u_\eta(t,\eta,y), & t\geq 0, \eta\neq\xi(t,y), y\in\overline{\mathcal{O}},\\ u(t,\xi(t,y),y) = u_*, \quad [\partial u/\partial\nu](t,\xi(t,y),y) = -1, & t\geq 0, y\in\overline{\mathcal{O}},\\ \partial u/\partial\nu(t,\eta,y) = 0, & t\geq 0, \eta\neq\xi(t,y), y\in\partial\mathcal{O},\\ \partial\xi/\partial\nu(t,y) = 0, & t\geq 0, y\in\partial\mathcal{O},\\ u(t,-\infty,y) = 0, \quad u(t,\infty,y) = u_\infty, & t\geq 0, \quad y\in\overline{\mathcal{O}}. \end{cases}$$

In questo caso il dominio incognito Ω_t è dato da $\{(\eta,y)\in\mathbb{R}\times\mathcal{O}: \eta\neq\xi(t,y)\}$. Il problema è detto *a due fasi* perché l'equazione differenziale $u_t = \Delta u + uu_\eta$ deve essere soddisfatta da ambo i lati del fronte incognito $\eta = \xi(t,y)$. La condizione corrispondente alla condizione di trasversalità (1.2) qui è data da $[\partial u/\partial\nu](t,\xi(t,y),y) = -1\neq 0$.

I dati sono le costanti u_*, $u_\infty > 0$, e i dati iniziali

$$\xi(0,y), \qquad u(0,\eta,y), \qquad y\in\overline{\mathcal{O}}.$$

Per $n=2$, $n=3$, il problema (3.1) può essere visto come modello di un fenomeno di combustione nel cilindro $\mathbb{R}\times\mathcal{O}$. Si suppone (e ciò corrisponde a fenomeni di combustione con alta energia di attivazione) che al tempo t la combustione avvenga in una piccola regione, che nel modello è data dal grafico della funzione $y\to\xi(t,y)$. L'incognita u è una temperatura normalizzata; la temperatura di combustione è dunque u_*, la temperatura limite della fase fresca, a sinistra del fronte, è 0, e quella della fase bruciata, a destra del fronte, è u_∞. Il salto nella derivata normale della temperatura sul fronte è normalizzato a -1.

In effetti (3.1) è una generalizzazione multidimensionale del noto modello DDT (= Deflagration–Detonation Transition) introdotto da Ludford e Stewart in [28] nello studio di fenomeni di transizione fra deflagrazione e detonazione, due tipi diversi di combustione. Il modello originale è unidimensionale,

$$\text{(3.2)} \qquad \begin{cases} u_t(t,\eta) = u_{\eta\eta}(t,\eta) + u(t,\eta)\, u_\eta(t,\eta), & t \geqslant 0\,,\ \eta \neq \xi(t)\,, \\ u(t,\xi(t)) = u_*, \quad [\partial u/\partial \eta](t,\xi(t)) = -1, & t \geqslant 0\,, \\ u(t,-\infty) = 0\,, \quad u(t,\infty) = u_\infty, & t \geqslant 0\,, \end{cases}$$

ma è noto dalla fisica che i fenomeni di detonazione (e anche quelli di transizione) sono tipicamente multidimensionali, e lo stesso Ludford osservava che un modello unidimensionale deve essere in qualche modo «troppo povero» per la descrizione di tali fenomeni.

Il problema (3.1) ammette una soluzione onda viaggiante piana, cioè del tipo

$$\xi(t,y) = -ct\,, \qquad u(t,\eta,y) = U(\eta + ct)\,,$$

se i parametri u_*, u_∞ soddisfano

$$u_\infty > \sqrt{2},\ 2/u_\infty < u_* < 2/u_\infty + u_\infty\,.$$

L'onda viaggiante piana è unica a meno di traslazioni, ed è data da

$$\text{(3.3)} \qquad c = 1/u_\infty + u_\infty/2\,,$$

$$\text{(3.4)} \qquad U(z) = \frac{2cu_* e^{cz}}{u_* e^{cz} + 2c - u_*}\,, \qquad z < 0\,,$$

$$\text{(3.5)} \qquad U(z) = \frac{u_\infty(u_* + 2/u_\infty) + (2/u_\infty)(u_\infty - u_*)\, e^{-(u_\infty/2 - 1/u_\infty) z}}{u_* + 2/u_\infty + (u_\infty - u_*)\, e^{-(u_\infty/2 - 1/u_\infty) z}}\,, \qquad z > 0\,.$$

L'espressione esplicita di U non è importante; la cosa che conta nel seguito è che U decade esponenzialmente ai suoi limiti 0, u_∞ per z tendente a $-\infty$, $+\infty$ rispettivamente, e la derivata U' decade esponenzialmente a 0.

Anche per il problema (3.1) il cambiamento di variabili che fissa la frontiera è quello banale, cioè

$$x = \eta - \xi(t,y)\,.$$

Poniamo ancora $\tilde{u}(t,x,y) = u(t,\eta,y)$, e scriviamo le perturbazioni del fronte e di U come

$$s(t, y) = \xi(t, y) + ct, \qquad \tilde{u}(t, x, y) - U(x) = s(t, y)\, U'(x) + w(t, x, y).$$

Le nuove incognite sono le funzioni s e w. Le condizioni $u(t, \xi(t)) = u_*$, $[\partial u/\partial \eta](t, \xi(t)) = -1$ permettono ancora di disaccoppiare il sistema, ottenendo

$$s(t, y) = [w](t, 0, y) = w(t, 0^+, y) - w(t, 0^-, y).$$

Il problema per w diventa

$$(3.6) \qquad \begin{cases} w_t = \mathcal{L}w + \mathcal{F}(w, Dw, D^2 w), & t \geq 0,\ x \neq 0,\ y \in \overline{\mathcal{O}}, \\ \mathcal{B}w = 0, \quad t \geq 0,\ x = 0,\ y \in \overline{\mathcal{O}}, \\ \mathcal{C}w = \mathcal{G}(Dw), \quad t \geq 0,\ x = 0,\ y \in \overline{\mathcal{O}}, \\ \dfrac{\partial w}{\partial \nu} = 0, \quad t \geq 0,\ x \neq 0,\ y \in \partial\mathcal{O}, \\ w(t, -\infty, y) = w(t, +\infty, y) = 0, & t \geq 0, \end{cases}$$

dove gli operatori lineari $\mathcal{L}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ sono dati da

$$\mathcal{L}v = \Delta v - cv_x + U_x v + Uv_x,$$

$$\mathcal{B}v(y) = v(0^-, y)\, U_x(0^+) - v(0^+, y)\, U_x(0^-), \qquad y \in \mathcal{O},$$

$$\mathcal{C}v(y) = [v_x(0, y)] + (u_* - c)[v(0, y)], \qquad y \in \mathcal{O}.$$

Le funzioni nonlineari $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ sono date da

$$\mathcal{F}(v, Dv, D^2 v)(x, y) = |[D_y v]|^2([v]\, U_{xxx} - U_{xx} + v_{xx}(x, y)) -$$

$$[\Delta_y v]([v]\, U_{xx} + v_x(x, y)) + 2\langle D_y v_x(x, y), [D_y v]\rangle + ([v]\, U_x + v)([v]\, U_{xx} + v_x) +$$

$$(1 - \mathcal{C}v(0, y))^{-1}([\mathcal{L}v] - [\Delta_y v]\mathcal{C}v + |[D_y v]|^2(u_* - c + [v](4u_* c - u_*^{\,2} - c^2 - 1) +$$

$$[v_{xx}]) + 2\langle [D_y v_x], [D_y v]\rangle + ([v](u_* c - u_*^2/2) + v(0^-))\, \mathcal{C}v)([v]\, U_{xx} + v_x(x, y)),$$

e

$$\mathcal{G}(Dv)(x, y) = 1 - (1 + |[D_y v(0, y)]|^2)^{-1/2}.$$

Anche in questo caso la soluzione nulla di (3.6) corrisponde alla soluzione onda di (3.1), e la stabilità della soluzione nulla di (3.6) corrisponde alla stabilità della soluzione onda di (3.1). Trattandosi di un problema completamente nonlineare è ragionevole ambientarlo in spazi di funzioni hölderiane, e come nel caso unidimensionale, per evitare problemi spettrali lo si ambienta in uno spazio hölderiano con peso,

$$X_\alpha = \{ w : (x, y) \mapsto q_-(x)\, w(x, y) \in C^\alpha(\mathbb{R}_- \times \overline{\mathcal{O}}),$$

$$(x, y) \mapsto q_+(x)\, w(x, y) \in C^\alpha(\mathbb{R}_+ \times \overline{\mathcal{O}}) \},$$

con norma

$$\|w\|_{X_\alpha} = \sup_{x<0,\, y \in \overline{\mathcal{O}}} |q_-(x)\, w(x, y)| + \sup_{x>0,\, y \in \overline{\mathcal{O}}} |q_+(x)\, w(x, y)| ,$$

dove $q_-(x) = e^{-cx/2}$, $q_+(x) = e^{(u_\infty/2 - 1/u_\infty)/2}$.

Si può dimostrare che il problema è ben posto in tali spazi. Precisamente, vale il risultato di esistenza locale seguente ([3]).

TEOREMA 3.1. – *Siano $\alpha \in (0, 1)$, $T > 0$. Esiste $R > 0$ tale che se $w_0 \in X_{2+\alpha}$ ha norma sufficientemente piccola e soddisfa le dovute condizioni di compatibilità*

$$(3.7) \quad \begin{cases} \mathcal{B} w_0(0, y) = 0\,, \quad \mathcal{B}(\mathcal{L} w_0 + \mathcal{F}(w_0, Dw_0, D^2 w_0))(0, 0, y) = 0\,, \quad y \in \overline{\mathcal{O}}, \\ \mathcal{C} u_0(0, y) = \mathcal{G}(Dw_0)(0, y), \quad y \in \overline{\mathcal{O}}, \\ \partial w_0 / \partial \nu_y(x, y) = \partial \mathcal{G}(Dw_0)/\partial \nu_y(t, y) = 0\,, \quad t \geq 0, \ y \in \partial \mathcal{O} \end{cases}$$

il problema (3.6) *con condizione iniziale $w(0, \cdot) = w_0$ ha un'unica soluzione classica w, tale che*

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|w(t, \cdot)\|_{X_{2+\alpha}} + \|w\|_{C^{1/2+\alpha/2}([0, T]; X_1)} + \|w\|_{C^{1+\alpha/2}([0, T]; X_0)} \leq R\,.$$

Si dimostra ([9]) che lo spettro della realizzazione L_α di $\mathcal{L}$ in X_α è dato dalla somma degli elementi di σ_1 e di σ_2, essendo

$$(3.8) \qquad \sigma_1 = \{ -\lambda_n : n \geq 0 \},$$

lo spettro del Laplaciano in $\mathcal{O}$ con condizione al bordo di Neumann, e

$$(3.9) \qquad \sigma_2 = (-\infty, -c^2/4 + 1/2] \cup \{0\} \cup \{\tilde{\lambda}\}$$

lo spettro dell'operatore $v \mapsto v_{xx} - c v_x + U v_x + U_x v$ nello spazio X_α, con condizioni al bordo (cioè in $x = 0$) $\mathcal{B} v = \mathcal{C} v = 0$. Notiamo che dalla (3.3) segue $c > \sqrt{2}$, per cui $-c^2/4 + 1/2 < 0$, mentre $\tilde{\lambda}$, quando esiste, è un autovalore reale che dipende da u_*. Valgono le seguenti proprietà:

(*a*) se $2/u_\infty < u_* \leq u_0$, $\tilde{\lambda} < 0$;

(*b*) se $u_0 < u_* \leq u_*^c$, $\tilde{\lambda}$ non esiste;

(*c*) se $u_*^c < u_* < u_\infty + 2/u_\infty = 2c$, $\tilde{\lambda} > 0$, dove $u_0 = c - \sqrt{c^2 - 1 - \sqrt{2c^2 - 3}}$, $u_*^c = c + \sqrt{c^2 - 1}$. Inoltre, $\lim_{u_* \downarrow u_*^c} \tilde{\lambda} = +\infty$, $\lim_{u_* \uparrow u_\infty + 2/u_\infty} \tilde{\lambda} = 0$, e la funzione $u_* \mapsto \tilde{\lambda}(u_*)$ è decrescente in $(u_*^c, u_\infty + 2/u_\infty)$.

Dunque lo spettro di L_α contiene sempre l'autovalore isolato 0, e contiene un elemento con parte reale positiva se e solo se $u_*^c < u_*$. Vale il Principio della Stabilità Linearizzata, nella seguente forma:

TEOREMA 3.2. – *Sia* $\alpha \in (0, 1)$. *La soluzione nulla di* (3.6) *è stabile nella norma di* $X_{2+\alpha}$ *se e solo se* $u_* \leq u_*^c$.

Nel caso in cui $u_* \leq u_*^c$, *denotiamo con* P *la proiezione spettrale sul kernel di* L_α,

$$Pv(x, y) = \frac{1}{u_\infty} \frac{1}{|\mathcal{O}|} \int_{\mathbb{R} \times \mathcal{O}} v(x, y)\, dx\, dy U'(x).$$

Fissiamo $\omega > 0$ *tale che* $\omega + \max(\sigma(L_\alpha) \setminus \{0\}) < 0$. *Allora per ogni* $R > 0$ *esiste* $r > 0$ *tale che se* $\|w_0\|_{X_{2+\alpha}} \leq r$ *e* w_0 *soddisfa* (3.7), *la soluzione* w *di* (3.6) *con dato iniziale* $w(0, \cdot) = w_0$ *è tale che*

$$\sup_{t \geq 0} e^{\omega t} \|(I - P)\, w(t, \cdot)\|_{X_{2+\alpha}} + \sup_{t \geq 0} e^{\omega t} \|d/dt(I - P)\, w(t, \cdot)\|_{X_\alpha} \leq R,$$

ed esiste finito il limite

$$p_\infty = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{u_\infty} \frac{1}{|\mathcal{O}|} \int_{\mathbb{R} \times \mathcal{O}} w(t, x, y)\, dx\, dy.$$

Tornando indietro al problema iniziale (3.1), si trova che l'onda viaggiante piana è orbitalmente stabile se $u_* \leq u_*^c$, instabile se $u_* > u_*^c$. Nel caso stabile inoltre per piccoli dati iniziali si ha che $\xi(t, \cdot) \simeq -ct - p_\infty$, con p_∞ dato dal Teorema 3.2, nel senso che $\sup_{t \geq 0} \|e^{\omega t}(\xi(t, \cdot) + ct + p_\infty)\|_{C^{2+\alpha}(\overline{\mathcal{O}})} < \infty$, con $\omega > 0$.

Questa conclusione vale tanto nel caso unidimensionale, cioè per il problema (3.12), quanto nel caso multidimensionale.

Consideriamo il caso in cui $\mathcal{O} = (-1, 1)$. Allora gli autovalori del Laplaciano sono $\{\lambda_k = k^2 \pi^2 / 4 : k \in \mathbb{N}\}$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$, sia u_*^k tale che

$$\tilde{\lambda}(u_*^k) = k^2 \pi^2 / 4.$$

Per $u_* = u_*^k$, 0 è autovalore doppio di $\mathcal{L}$, potendosi ottenere come $0 + 0$ e come $-k^2\pi^2/4 + k^2\pi^2/4$.

Si può dimostrare ([5], [3]) che per ogni $k \in \mathbb{N}$, u_*^k è un punto di biforcazione di una famiglia di soluzioni onde viaggianti non piane, cioè dipendenti esplicitamente da y, di (3.1).

Notiamo che la successione u_*^k tende decrescendo a u_*^c, per $k \to \infty$. Quindi

u_*^c è punto di accumulazione di una successione di punti di biforcazione di rami di onde viaggianti non piane, instabili, che vanno a disturbare in modo essenziale la stabilità dell'onda piana. Ovviamente le onde non piane non possono essere viste in dimensione 1; anche questo fatto porta alla conclusione che i fenomeni modellizzati da (3.1) siano di natura strettamente multidimensionale.

4. – Il modello di Sivashinsky.

Si tratta di un modello bidimensionale in teoria della combustione, introdotto e studiato da Sivashinsky in [25], in cui le incognite θ (temperatura) e S (entalpia) soddisfano un sistema mono-bifasico,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \theta}{\partial t} = \Delta \theta\,, & \eta < \xi(t, y)\,, \\ \theta = 1\,, & \eta \geq \xi(t, y)\,, \\ \dfrac{\partial S}{\partial t} = \Delta S - \lambda\, \Delta \theta\,, & \eta \neq \xi(t, y)\,. \end{cases} \tag{4.1}$$

Sul fronte incognito $\eta = \xi(t, y)$, θ e S sono continue, mentre si hanno le seguenti condizioni di salto per le derivate normali:

$$\begin{cases} \left[\dfrac{\partial \theta}{\partial n} \right] = -\exp(S)\,, \\ \left[\dfrac{\partial S}{\partial n} \right] = \lambda \left[\dfrac{\partial \theta}{\partial n} \right]. \end{cases} \tag{4.2}$$

Inoltre, per $\eta \to \pm\infty$,

$$\theta(t, -\infty, y) = S(t, -\infty, y) = S(t, +\infty, y) = 0\,. \tag{4.3}$$

Il sistema (4.1)-(4.3) è detto mono-bifasico perché è a una fase per quanto riguarda l'incognita θ, a due fasi per quanto riguarda l'incognita S. Si vede facilmente che esiste una soluzione onda viaggiante piana, con velocità -1, definita come al solito a meno di una traslazione: $(\xi, \theta, S) = (-t, \Theta^0(\eta + t), S^0(\eta + t))$ essendo

$$\Theta^0(x) = \exp x\,, \qquad S^0(x) = \lambda x \exp x\,, \quad \text{se } x \leq 0\,, \tag{4.4}$$

$$\Theta^0(x) = 1\,, \qquad S^0(x) = 0\,, \quad \text{se } x \geq 0\,. \tag{4.5}$$

La questione fondamentale è ancora di stabilire se l'onda viaggiante piana sia stabile o instabile, rispetto a perturbazioni bidimensionali. Gli studi formali in [25, Fig. 2], [12, Fig. 5.3] portano ai seguenti risultati:

(i) esiste un valore critico $\lambda_c < 0$ tale che, per $\lambda_c < \lambda < 1$, l'onda viaggiante piana (Θ_0, S_0) è orbitalmente stabile;

(ii) l'onda viaggiante piana è instabile per $\lambda \leqslant \lambda_c$ e per $\lambda > 1$.

Lo studio rigoroso fatto in [6] con i metodi descritti nei precedenti paragrafi fornisce una conferma dell'instabilità per $\lambda > 1$. In particolare, si dimostra che

TEOREMA 4.1. – *Per ogni* $\lambda > 1$ *esiste* $\delta > 0$, *ed esistono dati iniziali* (ξ_0, θ_0, S_0) *con norme* $\|\xi_0\|_{C^{2+\alpha}(\mathbb{R})}$, $\|\theta_0 - \Theta^0\|_{C^{2+\alpha}((-\infty,0)\times\mathbb{R})}$, $\|S_0 - S^0\|_{C^{2+\alpha}((-\infty,0)\times\mathbb{R})}$, $\|S_0 - S^0\|_{C^{2+\alpha}((0,+\infty)\times\mathbb{R})}$ *arbitrariamente piccole, tali che per qualche valore di* t *il fronte* ξ *relativo a tali dati iniziali soddisfa*

$$|\xi(t, y) + t| \geqslant C, \qquad -\delta \leqslant y \leqslant \delta .$$

Per quanto riguarda gli altri valori del parametro λ, ci si aspetta che gli stessi metodi funzionino e che non diano sorprese.

Un problema aperto molto piú interessante riguardo al sistema (4.1)-(4.3) è il seguente. Sempre con uno studio formale, Sivashinsky in [25] ha dedotto una equazione per il fronte incognito, anzi per la perturbazione del fronte $\varphi(t, y) = \xi(t, y) + t$:

$$\varphi_t + 4\varphi_{yyyy} + \varphi_{yy} + \frac{1}{2}\varphi_y^2 = 0 . \tag{4.6}$$

Questa è la nota equazione di Kuramoto-Sivashinsky, che da molti viene presa come punto di partenza per ulteriori studi, e sarebbe interessante giustificarla matematicamente (o confutarla!). Quello che si pensa attualmente è che (4.6) sia la «parte principale» di un'equazione piú complicata che al secondo membro non ha 0 ma un resto che comunque non altera la struttura fondamentale di (4.6).

5. – Problemi in domini limitati.

Abbiamo considerato finora problemi in domini illimitati, ma la tecnica descritta si applica anche nel caso di domini limitati, cfr. [4]. Consideriamo per esempio

$$u_t = \mathcal{L}u + f, \qquad t \geqslant 0, \ \eta = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in \Omega_t, \tag{5.1}$$

con condizioni sulla frontiera incognita

$$u = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = g \ \text{su} \ \partial\Omega_t. \tag{5.2}$$

Qui $\mathcal{L}$ è un operatore ellittico del secondo ordine con coefficienti regolari e definiti su tutto $\mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{L}u(\eta) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\eta)\, D_{ij}u(\eta) + \sum_{i=1}^{n} b_i(\eta)\, D_i u(\eta) + c(\eta)\, u(\eta)\,, \tag{5.3}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\eta)\, \xi_i \xi_j \geqslant c_0\, |\xi|^2, \qquad \eta,\ \xi \in \mathbb{R}^n .$$

Le incognite sono la famiglia di aperti limitati Ω_t e la funzione $u(t, \eta)$, definita per $t \geqslant 0$ e $\eta \in \Omega_t$.

Supponiamo che esista una soluzione stazionaria regolare, cioè una coppia (Ω, U) con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato con frontiera regolare e $U: \overline{\Omega} \mapsto \mathbb{R}$ regolare, tali che

$$\mathcal{L}U + f = 0 \quad \text{in } \Omega\,, \qquad U = 0\,,\ \partial U/\partial\nu = g \ \text{ su } \partial\Omega\,.$$

La condizione di trasversalità in questo problema è

$$g(x) \neq 0\,, \qquad \forall x \in \partial\Omega\,.$$

Il problema che ci poniamo è ancora quello dell'esistenza e unicità di una soluzione regolare di (5.1)-(5.2) e del suo comportamento per dati iniziali $(\Omega_0, u(0, \eta))$ «vicini» a (Ω, U).

Il cambiamento di variabili che trasforma Ω_t nell'aperto fisso Ω è meno ovvio di quelli visti fino ad ora ma altrettanto naturale: cerchiamo $\partial\Omega_t$ nella forma

$$\partial\Omega_t = \{\eta = x + s(t, x)\, \nu(x) : x \in \partial\Omega\}\,,$$

dove $\nu(x)$ è il versore normale esterno a $\partial\Omega$ nel punto x, e la nuova incognita $s(t, x)$ non è altro che la distanza con segno del punto $\eta(x) = x + s(t, x)\, \nu(x)$ da $\partial\Omega$. Questo è ragionevole dato che cerchiamo una soluzione regolare, e se $\partial\Omega_0$ è abbastanza vicino a $\partial\Omega$ allora almeno per tempi piccoli $\partial\Omega_t$ resterà in un intorno di $\partial\Omega$, dove la distanza con segno è regolare, e la funzione $x \mapsto \eta(x)$ trasforma $\partial\Omega$ in $\partial\Omega_t$. Tale funzione si estende in modo standard a un diffeomorfismo biunivoco $x \mapsto x + \Phi(t, x)$ da $\mathbb{R}^n$ in sé, la cui restrizione a Ω trasforma Ω in Ω_t. Come funzione Φ possiamo prendere per esempio

$$\Phi(t, x) = \begin{cases} \alpha(x)\, s(t, x')\, \nu(x') & \text{se } x \in N(\partial\Omega)\,, \\ 0 \quad \text{altrimenti}\,, \end{cases}$$

dove $N(\partial\Omega)$ è un intorno di $\partial\Omega$ dove la distanza con segno è regolare, $\alpha : \mathbb{R}^n \mapsto [0, 1]$ è di classe C^∞, ha supporto in $N(\partial\Omega)$ e vale 1 in un intorno di $\partial\Omega$, x' è il punto di $\partial\Omega$ piú vicino a x.

Si riconduce allora il problema iniziale a uno sul dominio fisso Ω, ponendo

$$\tilde{u}(t, x) = u(t, x + \Phi(t, x)), \qquad t \geq 0, \ x \in \overline{\Omega}.$$

Le nostre incognite sono le funzioni $s(t, x)$ definita per $x \in \partial\Omega$ e $\tilde{u}(t, x)$, definita per $x \in \Omega$. Per disaccoppiare il sistema si usa il procedimento descritto nelle sezioni precedenti adattato a questa situazione, cioè si introduce la nuova incognita w definita da

$$\tilde{u}(t, x) = U(x) + \langle DU(x), \Phi(t, x)\rangle + w(t, x).$$

Dopo un po' di calcoli si trova l'equazione verificata da w, che è del tipo

$$\begin{cases} w_t(t, x) = \mathcal{L}w(t, x) + F(w(t, \cdot), Dw(t, \cdot), D^2 w(t, \cdot))(x), & x \in \overline{\Omega}, \\ \mathcal{B}w = G(w(t, \cdot), Dw(t, \cdot))(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.4}$$

con condizione iniziale

$$w(0, x) = w_0(x), \qquad x \in \overline{\Omega}. \tag{5.5}$$

In (5.4), $\mathcal{L}$ è l'operatore definito da (5.3), mentre

$$\mathcal{B}w = \frac{\partial w}{\partial \nu} + \frac{1}{g}\left(\frac{\partial g}{\partial \nu} - \frac{\partial^2 U}{\partial \nu^2}\right) w,$$

inoltre la funzione nonlineare F dipende da w e dalle sue derivate spaziali prime e seconde, in modo non locale, e la funzione G dipende da w e dalle sue derivate spaziali prime. Sia F che G sono regolari, e si annullano in 0 insieme alle loro derivate. Ciò è quanto basta per dimostrare un risultato di esistenza locale con dipendenza continua dal dato iniziale, in spazi di funzioni hölderiane. Precisamente (cfr. [4]),

TEOREMA 5.1. – *Per ogni* $T > 0$ *e* $\alpha \in (0, 1)$ *esistono* r, $\varrho > 0$ *tali che* (5.4)-(5.5) *ha una soluzione* $w \in C^{1+\alpha/2, 2+\alpha}([0, T] \times \overline{\Omega})$ *se* $\|w_0\|_{C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})} \leq \varrho$ *e* $\mathcal{B}w_0 = G(w_0)$. *Inoltre* w *è l'unica soluzione tale che* $\|w\|_{C^{1+\alpha/2, 2+\alpha}([0, T] \times \overline{\Omega})} \leq r$.

Inoltre vale il Principio della Stabilità Linearizzata, nella seguente forma:

TEOREMA 5.2 *Sia* L *la realizzazione dell'operatore* $\mathcal{L}$ *in* $C^\alpha(\overline{\Omega})$ *definito da*

$$D(L) = \{w \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) : \mathcal{B}w = 0 \ \text{ in } \ \partial\Omega\}, \qquad Lw = \mathcal{L}w.$$

Allora

(i) *Se tutti gli elementi di* $\sigma(L)$ *hanno parte reale negativa,* $w=0$ *è un equilibrio stabile di* (5.4) *rispetto alla norma di* $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$. *Più precisamente, per ogni* $\omega \in (0, -\max\{\operatorname{Re}\lambda : \lambda \in \sigma(L)\})$, *esistono* C, $r>0$ *tali che per ogni* w_0 *con* $\mathcal{B}w_0 = G(w_0)$ *e* $\|w_0\|_{C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})} \leq r$, *la soluzione* di (5.4) *con dato iniziale* w_0 *esiste in grande e soddisfa*

$$\|w(t,\cdot)\|_{C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})} \leq Ce^{-\omega t}\|w_0\|_{C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})}, \qquad t \geq 0\,.$$

(ii) *Se* $\sigma(L)$ *contiene elementi con parte reale positiva,* $w=0$ *è instabile in* $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$.

Nel caso (ii) si costruiscono anche la «varietà stabile» e la «varietà instabile» relative alla soluzione nulla. Si tratta di due varietà invarianti: la prima, infinito dimensionale, costituita da tutti i (piccoli) dati iniziali w_0 per cui la soluzione esiste in grande e tende a 0 per $t \to \infty$; la seconda di dimensione finita, costituita da tutti i (piccoli) dati iniziali w_0 per cui il problema ha una soluzione retrograda che tende a 0 per $t \to -\infty$. Le due varietà aiutano a capire la struttura del sistema dinamico associato a (5.4).

Un problema tuttora aperto è quello della buona positura di (5.1)-(5.2) per dati iniziali non vicini a soluzioni stazionarie. Per quanto riguarda l'esistenza di una soluzione, il metodo sviluppato in [13] da Caffarelli e Vazquez fornisce una soluzione, non necessariamente unica, per dati iniziali soddisfacenti opportune ipotesi geometriche. Quali proprietà della soluzione si debbano richiedere per avere l'unicità non è chiaro al momento attuale.

Dato che il nostro problema è ambientato in aperti limitati, non è escluso il fenomeno dell'estinzione in tempo finito di Ω_t. Per esempio, il problema

$$u_t = \Delta u \quad \text{in } \Omega_t, \quad u=0 \;\text{ e }\; \frac{\partial u}{\partial n} = 1 \;\text{ su } \partial\Omega_t, \tag{5.6}$$

non ha soluzioni stazionarie, ma ammette soluzioni dette «di similarità», cioè del tipo

$$u(\eta, t) = \sqrt{T-t}\, f(x), \qquad x = \frac{|\eta|}{\sqrt{T-t}}, \qquad \Omega_t = \{|\eta| < b\sqrt{T-t}\}. \tag{5.7}$$

Affinché ciò avvenga la funzione f dovrà soddisfare

$$\begin{cases} f''(\eta) + \dfrac{n-1}{\eta} f'(\eta) + \dfrac{1}{2} f = \dfrac{1}{2}\eta f' & \text{per } 0 \leq \eta \leq b\,; \\ f'(0) = f(b) = 0\,, \qquad f'(b) = 1\,. \end{cases} \tag{5.8}$$

Queste condizioni determinano in modo unico $b = b_n$ per cui esiste esattamente una f soluzione di (5.8) tale che $f<0$ in $[0, b)$. La corrispondente soluzione di

(5.6) è tale che Ω_t si ritira verso l'origine al crescere del tempo, e si estingue al tempo $t = T$.

BIBLIOGRAFIA

[1] F. Alabau, A. Lunardi, *Behavior near the travelling wave solution of a free boundary system in Combustion Theory*, Dynamic Systems and Applications, **1** (1992), 391-418.

[2] H. Amann, *Linear and Quasilinear Parabolic Problems*, Vol. 1, Birkhäuser Verlag (1995).

[3] O. Baconneau, Tesi di Dottorato, Université Bordeaux 1 (1997).

[4] C. M. Brauner - J. Hulshof - A. Lunardi, *A general approach to stability in free boundary problems*, preprint University of Leiden (1998). In corso di stampa su J. Diff. Eqns.

[5] C.M. Brauner, A. Lunardi, *Bifurcation of non planar travelling waves in a free boundary problem*, Preprint Mathématiques Appliquées de Bordeaux 97022 (1997). In corso di stampa su Nonlinear Analysis T.M.A.

[6] C. M. Brauner - A. Lunardi, *Instabilities in a combustion model with free boundary in R^2*, In corso di stampa su Arch. Rat. Mech. Anal.

[7] C.-M. Brauner - A. Lunardi, Cl. Schmidt-Lainé, *Stability of travelling waves with interface conditions*, Nonlinear Analysis T.M.A., **19** (1992), 465-484.

[8] C.-M. Brauner - A. Lunardi, Cl. Schmidt-Lainé, *Multidimensional stability analysis of planar travelling waves*, Appl. Math. Letters, **7** (1994), 1-4.

[9] C.-M. Brauner - A. Lunardi, Cl. Schmidt-Lainé, *Stability of travelling waves in a multidimensional free boundary problem*, Preprints di Matematica, Sc. Norm. Sup. Pisa (1996). In corso di stampa su Nonlinear Analysis T.M.A.

[10] C. M. Brauner - S. Noor Ebad - Cl. Schmidt-Lainé, *Nonlinear stability analysis of singular travelling waves in combustion - a one-phase problem*, Nonlinear Analysis, **16** (1991), 881-892.

[11] J.D. Buckmaster - G. S. S. Ludford, *Theory of laminar flames*, Cambridge University Press, Cambridge (1982).

[12] CJ. D. Buckmaster - G. S. S. Ludford, *Lectures on mathematical combustion*, CBMS-NSF Conference Series in Applied Mathematics, SIAM (1983).

[13] L. A. Caffarelli - J. L. Vazquez, *A free boundary problem for the heat equation arising in flame propagation*, Trans. Amer. Math. Soc., **347** (1995), 411-441.

[14] M. Crandall - I. Ishii - P.-L. Lions, *A user's guide to viscosity solutions of nonlinear PDE's*, Bull. Amer. Math. Soc., **27** (1992), 1-67.

[15] S. Crank, *Free and Moving Boundary Problems*, The Clarendon Press, Oxford Univ. Press, New York (1987).

[16] G. Da Prato - P. Grisvard, *Equations d'évolution abstraites non linéaires de type parabolique*, Ann. Mat. Pura Appl. (IV) **120** (1979), 329-396.

[17] A. Fasano, M. Primicerio, *General free boundary problems for the heat equation*, Part I: J. Math. Anal. Appl., **57** (1977), 694-723; Part II: J. Math. Anal. Appl., **58** (1977), 202-231; Part III: J. Math. Anal. Appl., **57** (1977), 1-14.

[18] A. van Harten - B. J. Matkowski, *A new model in flame theory*, SIAM J. Appl. Math., **42** (1982), 850-867.

[19] D. Henry, *Geometric theory of parabolic equations*, Lect. Notes in Math., **840**, Springer, Berlin (1980).

[20] Y. Kortsarts - I. Brailovsky - S. Gutman - G. I. Sivashinsky, *On the stability of stretched flames*, Combust. Theory Modelling, **1** (1997), 143-156.

[21] N. Krylov, *Nonlinear Elliptic and Parabolic Equations of the Second Order*, Nauka, Moscow (1985). Traduzione in inglese: D. Reidel Publishing Co., «Mathematics and Its Applications», Dordrecht (1987).

[22] A. Lunardi, *Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems*, Birkhäuser, Basel (1995).

[23] A. Lunardi - E. Sinestrari - W. Von Wahl, *A semigroup approach to the time-dependent parabolic initial boundary value problem*, Diff. Int. Eqns., **5** (1992), 1275-1306.

[24] G. I. Sivashinsky, *Nonlinear analysis of hydrodynamics instability in laminar flames - I. Derivation of basic equations*, Acta Astronautica, **4** (1977), 1177-1206.

[25] G. I. Sivashinsky, *On flame propagation under conditions of stoichiometry*, SIAM J. Appl. Math., **39** (1980), 67-82.

[26] V. A. Solonnikov, *On the boundary value problems for linear parabolic systems of differential equations of general form*, Proc. Steklov Inst. Math., **83** (1965). English transl.: Boundary Value Problems of Mathematical Physics III, O.A. Ladyzhenskaja Ed., AMS (1965).

[27] H. B. Stewart, *Generation of analytic semigroups by strongly elliptic operators under general boundary conditions*, Trans. Amer. Math. Soc., **259** (1980), 299-310.

[28] D. S. Stewart - G. S. S. Ludford, *The acceleration of fast deflagration waves*, Z.A.M.M., **63** (1983), 291-302.

Dipartimento di Matematica, Università di Parma
Via D'Azeglio 85/A, 43100 Parma, Italy; lunardi@prmat.math.unipr.it