Edoardo Sernesi

Famiglie di curve sulle superfici algebriche

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-B** (2000), n.1, p. 1–10.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3B_1_1_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
(8) **1**-B (2000), 1-10

Famiglie di curve sulle superfici algebriche.

EDOARDO SERNESI (*)(**)

Famiglie di curve piane.

Nella mia conferenza passerò in rassegna alcuni risultati classici e recenti riguardanti le famiglie di curve sulle superfici algebriche, un argomento classico ma ancora ricco di problemi interessanti. Nel seguito si supporrà che le varietà algebriche considerate siano definite su $\boldsymbol{C}$, il campo dei numeri complessi. Per *superficie algebrica* si intenderà sempre una superficie algebrica proiettiva, nonsingolare e connessa.

Il primo caso da considerare, che costituisce anche il modello per ogni generalizzazione, è quello delle curve piane. Lo studio delle curve piane esercita un grande fascino su qualunque studioso delle curve algebriche: ciò è dovuto principalmente al fatto che tutti i problemi più interessanti e difficili riguardanti le curve algebriche astratte ed i loro moduli possono essere riformulati in termini di curve piane; ma visti da questo punto di vista essi diventano di solito ancora più misteriosi.

Le curve di grado $d \geqslant 1$ in $\mathbb{P}^2$ sono parametrizzate da uno spazio proiettivo $|\mathcal{O}(d)|$ di dimensione $(d(d+3))/2$, con coordinate omogenee naturali i coefficienti del polinomio omogeneo di grado d che definisce una curva. Le curve nonsingolari corrispondono ad un aperto $\mathcal{V}_{d,0}$ di $|\mathcal{O}(d)|$ e hanno genere $p_a := \binom{d-1}{2}$.

Per ogni punto $x \in |\mathcal{O}(d)|$ denoteremo con $C_x \subset \mathbb{P}^2$ la curva piana parametrizzata da x. Viceversa, per ogni curva piana C di grado d indicheremo con $[C]$ il punto di $|\mathcal{O}(d)|$ che la parametrizza.

L'obiettivo ultimo nello studio delle curve piane di grado d è quello di descrivere il modo in cui $|\mathcal{O}(d)|$ si stratifica in funzione delle proprietà di singolarità e di riducibilità che una curva può avere, cioè di descrivere i luoghi costituiti dalle curve con singolarità e numero di componenti irriducibili assegnate, e come essi sono situati gli uni rispetto agli altri.

Data la difficoltà di un obiettivo del genere, ci si limita inizialmente

(*) Conferenza tenuta a Napoli il 15 settembre 1999 in occasione del XVI Congresso U.M.I.

(**) Membro del progetto di ricerca «Geometria Algebrica» del MURST.

allo studio delle curve irriducibili aventi le singolarità più semplici. Anche questo caso è tutt'altro che facile.

Per ogni $1 \leq \delta \leq p_a$ denotiamo con $\mathcal{V}_{d,\delta}$ il sottoinsieme di $|\mathcal{O}(d)|$ che parametrizza curve irriducibili aventi δ nodi (cioè punti doppi ordinari) e nessun'altra singolarità. I luoghi $\mathcal{V}_{d,\delta}$ possono essere definiti in modo funtoriale, il che permette di introdurre in essi una struttura di sottoschema localmente chiuso di $|\mathcal{O}(d)|$; essi sono chiamati *varietà di Severi*, e hanno proprietà interessanti che furono studiate per la prima volta da Severi nel 1921 [S] (in realtà i suoi risultati risalgono almeno al 1915, ma furono pubblicati successivamente). Severi dimostrò che:

1) Per ogni $1 \leq \delta \leq p_a$, $\mathcal{V}_{d,\delta}$ è non vuota e regolare.

La *regolarità* di (una componente di) $\mathcal{V}_{d,\delta}$ significa che in ogni suo punto è nonsingolare di codimensione δ in $|\mathcal{O}(d)|$.

Si osservi che la stessa affermazione che le varietà di Severi sono non vuote non è banale. Inoltre la regolarità implica che le componenti irriducibili sono anche componenti connesse di $\mathcal{V}_{d,\delta}$. Per dimostrare la 1) Severi fece vedere che essa discende facilmente dal fatto che i nodi di una qualsiasi curva $C_x \subset \mathbb{P}^2$, $x \in \mathcal{V}_{d,\delta}$, impongono condizioni indipendenti alle curve di grado d; e questo corrisponde al fatto che le curve di grado d passanti per i nodi (le *aggiunte* di grado d) segano sulla desingolarizzazione $\widetilde{C}$ di C una serie lineare completa e nonspeciale.

Inoltre Severi affermò che

2) Ogni $\mathcal{V}_{d,\delta}$ è irriducibile.

Di questa affermazione Severi dette una dimostrazione incompleta. Essa fu dimostrata solo nel 1986 da J. Harris [H]. Per una interessante discussione del problema di dimostrare l'irriducibilità delle $\mathcal{V}_{d,\delta}$, anteriore alla sua soluzione, rinviamo il lettore a [Fu], dove sono anche discusse le relazioni con altri importanti problemi della Geometria Algebrica. Una esposizione a grandi linee della dimostrazione di Harris si trova in [HM]. Una dimostrazione indipendente e completamente diversa della 2) è stata data da Z. Ran in [R1]. Per un punto di vista ancora diverso si veda [Tr].

Le curve parametrizzate da $\mathcal{V}_{d,\delta}$ hanno genere geometrico $g := p_a - \delta$ e quindi le loro desingolarizzazioni definiscono punti di $\mathcal{M}_g$, la varietà dei moduli delle curve di genere g. Segue direttamente dalla definizione di $\mathcal{M}_g$ che l'applicazione

$$\varphi : \mathcal{V}_{d,\delta} \to \mathcal{M}_g$$

che manda un punto $x \in \mathcal{V}_{d,\delta}$ nella classe di isomorfismo di $\widetilde{C}_x$, la desingolarizzazione di C_x, è un morfismo. La dimensione di $\varphi(\mathcal{V}_{d,\delta})$ si dice *numero di moduli* di $\mathcal{V}_{d,\delta}$.

Di particolare interesse è il caso in cui φ è dominante, cioè il numero di moduli è il massimo possibile, uguale alla dimensione di $\mathcal{M}_g$ (che, lo ricordiamo, è uguale a $3g-3$ se $g \geqslant 2$, ed è rispettivamente 0 ed 1 per $g = 0, 1$). In questo caso si dice che $\mathcal{V}_{d,\,\delta}$ parametrizza una famiglia di curve *a moduli generali*. Negli altri casi le curve della famiglia si dicono *a moduli particolari*.

Supponiamo per semplicità d'ora in poi $g \geqslant 2$. Allora diremo che $\mathcal{V}_{d,\,\delta}$ ha il *giusto numero di moduli* se il suo numero di moduli è uguale a

$$\min\{3g-3,\, \dim(\mathcal{V}_{d,\,\delta}) - \dim(PGL(3))\} = \min\{3g-3,\, \dim(\mathcal{V}_{d,\,\delta}) - 8\}$$

Questa definizione essenzialmente postula che se una varietà di Severi consiste di curve a moduli particolari allora la fibra generale del morfismo φ può contenere solo un numero finito di classi di equivalenza proiettiva di curve. Si ha:

3) Per ogni d, δ ammissibili $\mathcal{V}_{d,\,\delta}$ ha il giusto numero di moduli.

Questo risultato è dovuto a Coppens [Co] in alcuni casi particolari ed a Sernesi [Se] in generale.

Un altro interessante problema riguardante le varietà di Severi $\mathcal{V}_{d,\,\delta}$ è quello di calcolarne il grado, o più precisamente di calcolare il grado della loro chiusura nello spazio proiettivo $|\mathcal{O}(d)|$. Nel caso particolare $\delta = 1$, cioè per l'ipersuperficie $\mathcal{V}_{d,\,1}$, il grado coincide con quello del discriminante dell'equazione della curva piana, che è uguale a $3(d-1)^2$. Per δ più grande il calcolo del grado presenta difficoltà notevoli. La prima formula generale è stata proposta da Z. Ran [R2], e ridimostrata con metodi diversi da Caporaso-Harris [CH]. La formula è troppo complicata per trovare posto in una conferenza di questo tipo: rinviamo pertanto il lettore interessato agli articoli originali.

Menzioniamo infine una interessante proprietà delle varietà di Severi, dimostrata in [DH]:

4) Le varietà di Severi sono affini.

Questo risultato è un raffinamento dell'ovvia osservazione che le varietà $\mathcal{V}_{d,\,\delta}$ non sono chiuse in $|\mathcal{O}(d)|$. Ad esempio, $\overline{\mathcal{V}}_{d,\,1}$ contiene tutte le curve singolari di grado d. La proprietà 4) implica ad esempio che ogni famiglia di curve di grado d parametrizzata da una curva *proiettiva* non può consistere interamente di curve aventi δ nodi: se la generica curva della famiglia appartiene a $\mathcal{V}_{d,\,\delta}$, la famiglia deve contenere qualche curva con singolarità ulteriori o più complicate.

In questa breve panoramica intendiamo limitare l'esposizione alle famiglie di curve con nodi, senza addentrarci nello studio delle curve piane (riducibili o irriducibili) con singolarità diverse. Ci basterà ricordare che è possibile considerare famiglie di curve dotate di singolarità di tipo preassegnato, dove il termine *tipo* sta ad indicare una nozione precisa che non staremo a specificare in questa sede. Un esempio importante è la famiglia $\mathcal{V}_{d,\delta,\kappa}$ delle curve piane irriducibili di grado d dotate di δ nodi e di κ cuspidi ordinarie. Anche queste famiglie furono studiate classicamente e lo sono tuttora.

Famiglie di curve su superfici qualsiasi.

Veniamo ora a considerare le estensioni di quanto visto finora a superfici più generali.

Sia S una superficie algebrica, L un fascio invertibile su S; supporremo che l'elemento generale C del sistema lineare completo $|L|$ definito da L sia una curva irriducibile e nonsingolare. Il genere p_a di C è dato dalla formula

$$p_a = p_a(L) = \frac{L \cdot L(K_S)}{2} + 1 .$$

Per ogni intero $0 \leqslant \delta \leqslant p_a$ è possibile definire, in analogia con il caso del piano, un sottoschema localmente chiuso $\mathcal{V}_{L,\delta} \subset |L|$ che parametrizza una famiglia «universale» di curve irriducibili aventi δ nodi e nessun'altra singolarità ed appartenenti al sistema lineare $|L|$. Gli schemi $\mathcal{V}_{L,\delta}$ vengono chiamati *varietà di Severi* relative al sistema lineare $|L|$. Esse verranno anche denotate $\mathcal{V}_{C,\delta}$, se C è un qualsiasi divisore appartenente a $|L|$.

Le proprietà di queste varietà dipendono ovviamente dalla superficie S e dal sistema lineare $|L|$. Esistono diversi problemi che si presentano naturalmente nello studio delle varietà di Severi su una superficie assegnata, tenendo conto di quanto è noto nel caso delle curve piane. Nel seguito mi limiterò a considerare i seguenti:

i) per quali L e per quali valori di δ si ha $\mathcal{V}_{L,\delta} \neq \emptyset$?

ii) calcolare dimensione ed eventuale regolarità (delle componenti) di $\mathcal{V}_{L,\delta}$.

iii) per quali L e δ la $\mathcal{V}_{L,\delta}$ è irriducibile?

iv) calcolare il numero di moduli da cui dipendono le curve parametrizzate dalle componenti irriducibili di $\mathcal{V}_{L,\delta}$.

Come vedremo, esistono al momento pochi risultati generali, mentre qualche informazione più dettagliata è nota in casi specifici.

Cominciamo dal problema i).

Premettiamo un principio generale che utilizza la teoria delle deformazioni. Esso afferma quanto segue:

PROPOSIZIONE. – *Sia $|L|$ un sistema lineare ad elemento generico nonsingolare irriducibile su una superficie S. Se una data varietà di Severi $\mathcal{V}_{L,\delta}$ possiede una componente irriducibile regolare, allora tutte le varietà $\mathcal{V}_{L,\delta'}$,*

$0 \leqslant \delta' \leqslant \delta$, *possiedono una componente irriducibile regolare, ed in particolare sono non vuote.*

Per una dimostrazione si veda [Se]. Questa proposizione permette in alcuni casi di ottenere risultati di esistenza.

Ad esempio, l'enunciato di Severi (contenuto in 1)) che afferma che $\mathcal{V}_{d,\delta} \neq \emptyset$ per ogni $0 \leqslant \delta \leqslant \binom{d-1}{2}$ discende proprio da questa proposizione. Infatti proiettando in modo generico in $\mathbb{P}^2$ una curva razionale e normale di grado d in $\mathbb{P}^d$ si ottiene una curva piana irriducibile di grado d avente $\binom{d-1}{2}$ nodi; poiché questa curva appartiene ad una componente regolare di $\mathcal{V}_{d,\binom{d-1}{2}}$, la conclusione segue.

Un altro risultato di esistenza, dovuto a Chen, si riferisce a superfici S di tipo K3, cioè tali che $(H^1(S, \mathcal{O}_S)) = 0$ e $\omega_S \cong \mathcal{O}_S$.

Esso afferma quanto segue:

TEOREMA ([Ch]). – *Per ogni $g \geqslant 3$ su una superficie K3 generale $S \subset \mathbb{P}^g$ esistono curve razionali nodate nel sistema lineare $|\mathcal{O}_S(n)|$ per ogni $n > 0$.*

Si osservi che, poiché $p_a(\mathcal{O}_S(n)) = \dim(|\mathcal{O}_S(n)|)$, una curva razionale nodata in $|\mathcal{O}_S(n)|$ ha $\delta = \dim(|\mathcal{O}_S(n)|)$ nodi.

Come vedremo tra poco, ogni curva razionale nodata C in una superficie K3 S costituisce una componente irriducibile (0-dimensionale) regolare di $\mathcal{V}_{C,\delta}$. Pertanto, grazie alla proposizione si ha anche il seguente:

TEOREMA. – *Sia $S \subset \mathbb{P}^g$ una superficie K3 generale, $g \geqslant 3$. Per ogni $n > 0$ e per ogni $0 \leqslant \delta \leqslant \dim(|\mathcal{O}_S(n)|)$ la varietà di Severi $\mathcal{V}_{\mathcal{O}(n),\delta}$ contiene componenti irriducibili regolari.*

Una altro interessante risultato di esistenza è dovuto a Chiantini-Ciliberto, e si riferisce alle superfici di $\mathbb{P}^3$. Esso afferma quanto segue:

TEOREMA ([CC]). – *Sia S una superficie generale di grado d in $\mathbb{P}^3$. Per ogni $n \geqslant d$ e per ogni $0 \leqslant \delta \leqslant \dim(|\mathcal{O}_S(n)|)$ la varietà di Severi $\mathcal{V}_{\mathcal{O}(n),\delta}$ possiede una componente irriducibile regolare.*

Questo risultato viene dimostrato da Chiantini-Ciliberto per induzione sul grado d della superficie, utilizzando tecniche di degenerazione ed il risultato di Chen, nel caso delle superfici quartiche, come passo iniziale dell'induzione.

Veniamo al problema ii). La teoria delle deformazioni fornisce una descrizione esplicita dello spazio tangente $T_{\mathcal{V},[C]}$ ad una varietà di Severi $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{L,\delta}$ in un suo punto $[C]$. Precisamente si ha:

$$T_{\mathcal{V},[C]} = \frac{H^0(S, L \otimes \mathcal{J}_N)}{\langle C \rangle}$$

dove $N \subset C$ è il sottoinsieme dei nodi di C e $\langle C \rangle$ è l'immagine dell'omomorfismo:

$$H^0(S, \mathcal{O}_S) \to H^0(S, L)$$

definito dall'equazione di C. Poiché

$$T_{|L|,[C]} = \frac{H^0(S, L)}{\langle C \rangle}$$

e poichè la famiglia $\mathcal{V}_{L,\delta}$ ha codimensione al più δ in $|L|$, $\mathcal{V}_{L,\delta}$ è nonsingolare di codimensione δ nel punto $[C]$ se e solo se $T_{\mathcal{V},[C]}$ ha codimensione δ in $T_{|L|,[C]}$. Dalla descrizione di $T_{\mathcal{V},[C]}$ vediamo che ciò accade se e solo se i nodi di C impongono condizioni indipendenti al sistema lineare $|L|$.

Nel caso in cui $S = \mathbb{P}^2$ le curve di $|L| = |\mathcal{O}(d)|$ passanti per i nodi di C (le aggiunte a C di grado d) segano sulla desingolarizzazione $\widetilde{C}$ una serie completa e non speciale e ciò implica la proprietà voluta, e quindi la regolarità di $\mathcal{V}_{d,\delta}$. Se più in generale S è una superficie razionale qualunque tale che $K_S C < 0$, le aggiunte a C appartenenti ad $|L|$ segano ancora una serie completa e non speciale su $\widetilde{C}$, e ciò permette di dedurre la regolarità delle varietà di Severi $\mathcal{V}_{L,\delta}$ anche in questo caso. In modo simile si può procedere nel caso in cui S è una superficie K3, ed ottenere la regolarità di tutte le varietà di Severi su una superficie K3. Queste estensioni della teoria di Severi sono dovute a Tannenbaum ([Ta1] e [Ta2]).

Ovviamente questi risultati si riferiscono a varietà di Severi che si suppongono non vuote, e non danno alcuna informazione sulla loro esistenza, cioè sul problema i).

La principale classe di superfici alle quali si vorrebbero estendere i risultati di regolarità, o almeno determinare i limiti entro cui essi si possono estendere, sono le *superfici di tipo generale*. Ricordiamo che una superficie è di tipo generale se $\dim(H^0(S, nK_S))$ cresce come un polinomio di grado 2 al crescere di n. Di questa classe non fanno ovviamente parte né le superfici razionali né le K3.

Il metodo di Severi per determinare la regolarità delle varietà di Severi fallisce per le superfici di tipo generale: il motivo è che la condizione sulle aggiunte che abbiamo considerato in precedenza non è mai soddisfatta in questo caso. Occorre quindi un altro metodo per stabilire se i nodi di una curva nodata C impongono o meno condizioni indipendenti al sistema lineare $|L|$ cui la curva appartiene.

Questo metodo esiste ed è stato utilizzato per la prima volta da Chiantini-Sernesi nello studio delle varietà di Severi sulle superfici di tipo generale. Esso consiste nell'associare ai nodi N di C un fibrato vettoriale di rango 2 su S e nell'applicare il criterio di instabilità di Bogomolov a tale fibrato. Le condizioni numeriche che danno l'instabilità si traducono in disuguaglianze che coinvolgono il numero δ di nodi e permettono, in certi casi, di ottenere condizioni di regolarità. Il criterio dimostrato in [CS] è il seguente:

TEOREMA (Chiantini-Sernesi). – *Sia S una superficie tale che K_S sia ampio, e sia C una curva irriducibile tale che $|C|$ contenga curve nonsingolari e tale che*

$$C \equiv_{\mathrm{num}} pK_S \qquad p > 2,\ p \in \boldsymbol{Q}$$

Supponiamo che C possieda $\delta \geqslant 1$ nodi e nessun'altra singolarità e che

$$\delta < \frac{p(p-2)}{4} K_S^2$$

oppure

$$\delta < \frac{(p-1)^2}{4} K_S^2 \qquad p \in \boldsymbol{Z} \text{ dispari}, \quad \mathrm{NS}(S) = \boldsymbol{Z} K_S$$

(*dove* NS(S) *denota il gruppo di Neron-Severi di S*). *Allora i nodi di C impongono condizioni indipendenti a $|C|$. In particolare la varietà di Severi $\mathcal{V}_{C,\delta}$ è regolare.*

Questo risultato afferma che ogni componente di $\mathcal{V}_{C,\delta}$ è regolare, se le ipotesi sono soddisfatte. In [*CS*] vengono anche costruiti degli esempi che dimostrano che le disuguaglianze del teorema sono le migliori possibili, almeno per le superfici quintiche di $\mathbb{P}^3$.

Utilizzando metodi simili il teorema precedente è stato esteso da Greuel-Lossen-Shustin [GLS] a famiglie di curve con singolarità di tipo arbitrario. L'enunciato dà una condizione di regolarità per tali famiglie che coinvolge i caratteri numerici relativi al tipo di singolarità. Ovviamente in questo caso la nozione di regolarità deve essere riformulata in modo opportuno.

Infine un recente risultato di Flamini [F] fornisce un criterio di regolarità per varietà di Severi (quindi per curve nodate) che generalizza sia il risultato di [CS] che quello ottenuto da [GLS] nel caso dei nodi. L'enunciato è il seguente:

TEOREMA (Flamini). – *Sia S una superficie proiettiva irriducibile e nonsingolare, e sia $C \subset S$ una curva irriducibile e nonsingolare. Si supponga che*

1) $(C-2K_S)^2 > 0\,, \qquad C(C-2K_S) > 0\,;$

2) $K_S^2 > -4$ *se* $C(C-2K_S) \geqslant 8$
   $K_S^2 \geqslant 0$ *se* $C(C-2K_S) < 8\,;$

3) $CK_S \geqslant 0\,;$

4) $(CK_S)^2 - C^2K_S^2 < 4(C(C-2K_S)-4)\,;$

5) $\delta \leqslant \dfrac{C(C-2K_S)}{4} - 1$ *se* $C(C-2K_S) \geqslant 8$
   $\delta < \dfrac{C(C-2K_S) + \sqrt{C^2(C-2K_S)^2}}{8}$ *se* $0 < C(C-2K_S) < 8\,.$

Allora la varietà di Severi $\mathcal{V}_{C,\delta}$ *è regolare.*

La dimostrazione è un raffinamento di quella di Chiantini-Sernesi. L'interesse di questo risultato sta nel fatto che tutte le ipotesi del teorema sono puramente numeriche.

Passiamo a considerare il problema iii) sull'irriducibilità delle varietà di Severi. Questa questione si pone naturalmente a causa del risultato 2) valido per le curve piane, ma non è difficile convincersi che la risposta è in generale negativa.

È sufficiente infatti considerare una superficie generale S_d di grado $d \geqslant 4$ in $\mathbb{P}^3$: S_d possiede un numero finito maggiore di uno di piani tritangenti, e ciascuno di essi la interseca in una curva appartenente a $\mathcal{V}_{\mathcal{O}(1),3}$, cioè irriducibile con 3 nodi. Ognuna di esse costituisce una componente irriducibile di $\mathcal{V}_{\mathcal{O}(1),3}$.

Altri esempi meno evidenti si possono costruire combinando il risultato di esistenza di Chiantini-Ciliberto citato in precedenza con gli esempi costruiti da Chiantini-Sernesi di componenti non regolari di varietà di Severi sulle quintiche di $\mathbb{P}^3$. Per ulteriori esempi rinviamo il lettore interessato a [CC].

Questi esempi suggeriscono che il problema dell'irriducibilità deve essere diversamente formulato. In [CC] Chiantini-Ciliberto hanno osservato che, per superfici generali di $\mathbb{P}^3$, non sono noti esempi di varietà di Severi che possiedono più di una componente irriducibile regolare (ad eccezione di quelle di dimensione zero), e pertanto hanno congetturato che ne esista una sola.

Il problema iv) si presenta come alquanto complesso, a causa dell'esistenza di diverse componenti, anche non regolari, delle varietà di Severi su una superficie proiettiva qualunque. In primo luogo non è chiaro quale sia, e se esista, una buona definizione di *giusto numero di moduli*, e al momento non esistono risultati sufficientemente generali da indicare un quadro congetturale attendibile.

L'unico risultato noto al momento è il seguente, dovuto a Flamini:

TEOREMA ([Fl]). – *Sia $S \subset \mathbb{P}^n$ una superficie regolare di tipo generale, e sia $C \subset S$ una curva irriducibile avente δ nodi e nessun'altra singolarità. Supponiamo che*:

i) $\Omega^1_S(K_S)$ *sia globalmente generato.*

ii) $C \sim K_S + 6H + A$, *dove H è una sezione iperpiana e A è un divisore ampio*;

iii) $\mathcal{V}_{C,\delta}$ *sia nonsingolare di codimensione δ in* $[C]$.

Allora il morfismo

$$\varphi : \mathcal{V}_{C,\delta} \to \mathcal{M}_{p_a(C)-\delta}$$

ha differenziale iniettivo in $[C]$. *In particolare, φ ha fibre finite su ogni componente regolare di* $\mathcal{V}_{C,\delta}$.

Questo risultato afferma che, nelle ipotesi dette, il numero di moduli è uguale alla dimensione della varietà di Severi. Il teorema si applica per esempio ai sistemi lineari $|\mathcal{O}_S(n)|$, $n \geqslant d+3$, su una superficie $S_d \subset \mathbb{P}^3$ di grado $d \geqslant 6$.

REFERENCES

[CH] L. CAPORASO - J. HARRIS, *Counting plane curves of any genus*, Inventiones Math., **131** (1998), 345-392.

[Ch] X. CHEN, *Rational curves on K3 surfaces*, Tesi, Harvard Univ., 1997.

[CC] L. CHIANTINI - C. CILIBERTO, *On the Severi varieties of surfaces in* $\mathbb{P}^3$, *J. Alg. Geometry*, 8 (1999), 67-83.

[CS] L. CHIANTINI - E. SERNESI, *Nodal curves on surfaces of general type*, Math. Annalen, **307** (1997), 41-56.

[Co] M. R. M. COPPENS, *Plane models of smooth curves over* ***C***, preprint Univ. of Utrecht, 1992.

[DH] S. DIAZ - J. HARRIS, *Geometry of the Severi varieties*, Trans. of the AMS, **309** (1988), 1-34.

[Fl] F. FLAMINI, *Families of nodal curves on projective surfaces*, tesi XI ciclo di dottorato, Univ. La Sapienza e Roma III, 1999.

[Fu] W. FULTON, *On nodal curves*, in *Algebraic Geometry-Open Problems. Proceedings Ravello 1982*. LNM 997, p. 146-155, Springer Verlag, 1983.

[GLS] G. M. Greuel - C. Lossen - E. Shustin, *New asymptotics in the geometry of equisingular families of curves*, Intern. Math. Res. Notices, **13** (1997), 595-611.

[H] J. Harris, *On the Severi problem*, Inventiones Math., **84** (1986), 445-461.

[HM] J. Harris - D. Morrison, *Moduli of Curves*, GTM 187, Springer Verlag 1998.

[R1] Z. Ran, *On nodal plane curves*, Inventiones Math., **86** (1986), 529-534.

[R2] Z. Ran, *Enumerative geometry of singular plane curves*, Inventiones Math., **97** (1989), 447-465.

[Se] E. Sernesi, *On the existence of certain families of curves*, Inventiones Math., **75** (1984), 25-57.

[S] F. Severi, *Vorlesungen uber Algebraischer Geometrie, Anhang F*, Leipzig, Teubner 1921.

[Ta1] A. Tannenbaum, *Families of algebraic curves with nodes*, Compositio Math., **41** (1980), 107-126.

[Ta2] A. Tannenbaum, *Families of curves with nodes on K3 surfaces*, Math. Annalen, **260** (1982), 239-253.

[Tr] R. Treger, *Local properties of families of plane curves*, J. Diff. Geometry, **39** (1994), 51-55.

Dipartimento di Matematica, Università degli Studi Roma Tre
L.go S.L. Murialdo 1, 00146 Roma