Annalisa Marcja

Da Tarski a Hrushovski: Nascita e splendori della Teoria dei Modelli

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-B** (2000), n.2, p. 287–300.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3B_2_287_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
(8) 3-B (2000), 287-300

Da Tarski a Hrushovski: Nascita e splendori della Teoria dei Modelli (*).

ANNALISA MARCJA

1. – Nascita.

Ringrazio per l'invito a tenere una conferenza generale al XVI Congresso U.M.I. Visto che l'ultima conferenza di Logica è stata quella di Lolli del 1987, mi sono subito sentita investita di una grossa responsabilità. Grossa responsabilità che si è rivelata immediatamente nella difficoltà di trovare il taglio giusto della conferenza e quindi il titolo. Un collega che stava leggendo Balzac mi ha suggerito «Splendori e miserie della Teoria dei Modelli». A me non è sembrato giusto adombrare miserie in una conferenza propagandistica per cui ho preferito optare per il titolo attuale.

L'obiettivo è quello di evidenziare il ruolo della Teoria dei Modelli nella ricerca matematica, discutendo alcuni punti di maggior rilevanza (almeno nei gusti di chi parla). Tralascerò una trattazione troppo attenta allo sviluppo storico della materia, preferendo, per migliore efficacia, procedere per «flashback» e proponendo semmai alla fine una riflessione generale.

Voglio ringraziare C. Toffalori per le numerose conversazioni avute insieme sul contenuto di questa conferenza.

Il nome «Teoria dei Modelli» fu introdotto da Tarski nel 1954 [T54] sebbene le sue radici risalgano alla prima metà del secolo.

Ecco le parole di Tarski:

Within the last years a new branch of metamathematics has been developing. It is called *theory of models* and can be regarded as a part of the semantics of formalized theories.

The problems studied in the theory of models concern mutual relations between sentences of formalized theories and mathematical systems in which these sentence hold.

Per capire meglio il senso della definizione di Tarski, consideriamo una struttura $\mathcal{M}$ (che potrebbe essere $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{C}$, un generico gruppo ecc.) oppure

(*) Conferenza tenuta a Napoli il 15 settembre 1999 in occasione del XVI Congresso U.M.I.

una classe $\mathcal{K}$ di strutture (la classe di tutti i gruppi, di tutti i campi ecc.). Per arricchire la nostra conoscenza di $\mathcal{M}$ è importante la scelta del linguaggio *appropriato* per $\mathcal{M}$ in cui formulare gli enunciati *veri* in $\mathcal{M}$ (di cui $\mathcal{M}$ è *modello*) oppure in $\mathcal{K}$ (cioè veri in tutte le strutture di $\mathcal{K}$). La scelta che i teorici dei modelli fanno è quella del linguaggio dei predicati del I ordine cioè quello in cui si usano variabili per gli elementi di M, simboli per operazioni e relazioni su M, connettivi e quantificatori che però agiscono soltanto su variabili per elementi (non si permette cioè quantificazione su sottoinsiemi e funzioni). Questa è ovviamente una restrizione del potere espressivo del linguaggio, ma si può dimostrare (Lindström) che è il linguaggio più maneggevole.

Indichiamo con $Th(\mathcal{M})$ (*teoria di* $\mathcal{M}$) l'insieme di tutti gli enunciati *veri* in $\mathcal{M}$. Ovviamente per usare efficacemente $Th(\mathcal{M})$ per lo studio di $\mathcal{M}$ è desiderabile che $Th(\mathcal{M})$ sia effettivamente descrivibile in pratica (anche se questa non è una condizione necessaria).

Tarski già dagli anni 30 era interessato a questioni di decidibilità per $\boldsymbol{R}$ o $\boldsymbol{C}$. Prendiamo per esempio $\boldsymbol{R}$. Tarski (in un articolo pubblicato da Mc Kinsey soltanto nel 1948 a cura della RAND Corporation [T48]) trovò «un metodo di decisione per l'algebra elementare e la geometria» che porta alla possibilità (teorica) di costruire una macchina di decisione. Per «algebra elementare» Tarski intendeva proprio $Th(\boldsymbol{R})$ nel linguaggio $L_{or} = \{0, 1, +, -, \cdot, \leqslant\}$ degli anelli ordinati. Tra le formule di questo linguaggio ci sono ovviamente le equazioni e le disequazioni. Combinando queste con connettivi e quantificatori si ottengono tutte le formule di L_{or}.

Il teorema fondamentale dell'articolo di Tarski (la cui dimostrazione fa uso del teorema di Sturm) è:

TEOREMA 1 (Tarski). – *È possibile dare effettivamente*

(i) *un procedimento che ad ogni formula* $\phi(v_1, \ldots, v_n)$ *di* L_{or} *associa una formula* priva di quantificatori $\overline{\phi}(v_1, \ldots, v_n)$ *di* L_{or},

(ii) *una dimostrazione dell'equivalenza* $\phi(v_1, \ldots, v_n) \leftrightarrow \overline{\phi}(v_1, \ldots, v_n)$ *che usa soltanto gli assiomi di campo ordinato e uno schema di assiomi asserente che polinomi che cambiano segno hanno uno zero (Proprietà del valor intermedio per i polinomi) e cioè:*

per ogni n naturale,

$$\forall v_0 \forall v_1 \ldots \forall v_n \forall u \forall w \exists v(v_0 + v_1 \cdot u + \ldots + v_n \cdot u^n + u^{n+1} < 0 \wedge$$
$$\wedge 0 < v_0 + v_1 \cdot w + \ldots + v_n \cdot w^n + w^{n+1} \wedge u < w \rightarrow$$
$$\rightarrow u < v \wedge v < w \wedge v_0 + v_1 \cdot v + \ldots + v_n \cdot v^n + v^{n+1} = 0).$$

Se indichiamo con *RCF* (*teoria dei campi ordinati reali chiusi*) l'insieme degli assiomi di sopra e delle loro conseguenze, la (ii) implica che $Th(\boldsymbol{R}) = RCF$ e che $Th(\boldsymbol{R})$ (e quindi RCF) ha la cosiddetta *eliminazione dei quantificatori* nel linguaggio L_{or}.

Anche se non pubblicato, si attribuisce ancora a Tarski un analogo risultato per $\boldsymbol{C}$ (ovviamente nel linguaggio $L_r = \{0, 1, +, -, \cdot\}$ degli anelli): si sostituisce a RCF la teoria ACF_0 dei *campi algebricamente chiusi* di caratteristica 0, i cui assiomi sono quelli di campo e schemi asserenti la caratteristica e che ogni polinomio (monico) di grado $\geqslant 1$ ammette almeno una radice:

per ogni n naturale,

$$1 + \ldots + 1 \neq 0 .$$

e

per ogni n naturale,

$$\forall v_0 \forall v_1 \ldots \forall v_n \exists v (v_0 + v_1 \cdot v + \ldots + v_n \cdot v^n + v^{n+1} = 0) .$$

Dal Teorema 1 segue che $Th(\boldsymbol{R})$ $(Th(\boldsymbol{C}))$ è assiomatizzabile e quindi decidibile.

È da notare che l'assiomatizzabilità di $Th(\mathcal{M})$ non è una proprietà valida per ogni struttura $\mathcal{M}$: dal Teorema di Gödel segue per esempio che $Th(\boldsymbol{Z})$ ($\boldsymbol{Z}$ come anello) e $Th(\boldsymbol{Q})$ ($\boldsymbol{Q}$ come campo) (J. Robinson) non sono decidibili (e quindi non assiomatizzabili); a questo proposito, è interessante sottolineare che la teoria del gruppo ordinato $\boldsymbol{Z}$ è decidibile.

C'è poi una valenza del teorema 1, in particolare di (i), che va forse al di là degli interessi originari di Tarski, ma ha raccolto progressivamente crescente interesse. Essa riguarda sottoinsiemi *definibili* di $\boldsymbol{R}$ (di $\boldsymbol{C}$) e cioè gli insiemi che sono soluzioni di una formula del linguaggio scelto e mette in evidenza come essi siano esattamente quelli semialgebrici (costruibili); in effetti un collega di Tarski, A. Seidenberg di Princeton, pubblicò nel 1954 un'altra dimostrazione del teorema in un giornale molto più letto (Annals of Mathematics) [S] formulandolo (per $\boldsymbol{R}$) nella forma oggi nota come

Teorema di Tarski-Seidenberg:
La proiezione di un insieme semialgebrico è un insieme semialgebrico.

È chiaro che ogni insieme semialgebrico è definibile in $\boldsymbol{R}$, tramite una formula priva di quantificatori (combinazione booleana di formule atomiche $q(\vec{v}) \geqslant 0$). Il teorema di Tarski e Seidenberg assicura che gli insiemi definibili di $\mathcal{R}^n$ sono esattamente quelli semialgebrici.

Analogamente per $\boldsymbol{C}$, dal teorema si ottiene come facile esercizio il

Teorema di Chevalley (1948):
La proiezione di un insieme costruibile è un insieme costruibile.

2. – Sul concetto di chiusura algebrica.

È ben noto da risultati algebrici che per ogni campo (campo ordinato) esiste unica la chiusura algebrica (la chiusura reale). A. Robinson osserva la situazione comune nei risultati di Tarski e pensa di generalizzare questo concetto a una struttura qualunque; ma invece di focalizzare l'attenzione sulle condizioni generali per l'esistenza e l'unicità della chiusura algebrica di una struttura, sottolinea la seguente proprietà:

Un campo K è *algebricamente chiuso* se e solo se ogni sistema di equazioni a soluzioni in un'estensione di K, ha già soluzione in K.

Un campo ordinato K è *reale chiuso* se e solo se ogni sistema di equazioni e disequazioni a soluzioni in un'estensione ordinata di K, ha già soluzione in K.

A. Robinson generalizza questo concetto dando la definizione di struttura esistenzialmente chiusa.

Una possibile motivazione per l'introduzione di questo concetto richiama l'idea di A. Weil (Foundations of Algebraic Geometry) di «domini universali», e cioè di strutture così grandi da immergere ogni altra struttura in esame.

Nel caso dei campi, un dominio universale è

– un campo algebricamente chiuso... (concetto, questo, tale da garantire, ad esempio il Nullstellensatz)

– di grado di trascendenza infinito (opportunamente grande).

L'idea di Weil pare superata in Geometria Algebrica, ma è ancora viva in Teoria dei Modelli (e certamente lo era al tempo di A. Robinson). In un contesto astratto, un dominio universale corrisponde appunto ad una

– struttura esistenzialmente chiusa

saturata (cioè grande).

Proprietà di amalgamazione ne garantiscono l'esistenza. Limitandoci al primo livello, ecco la relativa definizione

DEFINIZIONE 2. – *Una struttura $\mathcal{A} \in \boldsymbol{K}$ si dice* esistenzialmente chiusa (e.c.) *se e solo se, per ogni immersione di $\mathcal{A}$ in qualche $\mathcal{B} \in \boldsymbol{K}$, per ogni formula $\varphi(\vec{w})$ senza quantificatori a parametri in A, se è vera in $\mathcal{B}$, allora è vera in $\mathcal{A}$.*

Indichiamo con $\mathcal{E}(\boldsymbol{K})$ la classe delle strutture e.c. in $\boldsymbol{K}$. Allora le strutture e.c. nella classe dei campi sono i campi algebricamente chiusi, e le strutture e.c. nella classe dei campi ordinati sono i campi reali chiusi.

In generale, data una classe $\boldsymbol{K} \neq \emptyset$, possiamo anzitutto chiederci se esistono strutture e.c. in $\boldsymbol{K}$, cioè se $\mathcal{E}(\boldsymbol{K}) \neq \emptyset$. La risposta è sì, almeno sotto semplici condizioni su $\boldsymbol{K}$. Notiamo poi che, nei due esempi proposti, $\boldsymbol{K}$ è assiomatizzabile, così come $\mathcal{E}(\boldsymbol{K})$. Allora ci si può chiedere se, in generale, $\mathcal{E}(\boldsymbol{K})$ è assiomatizzabile, purché $\boldsymbol{K}$ lo sia. La risposta è negativa. Per esempio se $\boldsymbol{K}$ è la classe - assiomatizzabile - dei gruppi, $\mathcal{E}(\boldsymbol{K})$ non è assiomatizzabile (Eklof-Sabbagh [ES], Macintyre [M]).

Naturalmente esistono anche altri esempi di classi assiomatizzabili $\boldsymbol{K}$ per cui $\mathcal{E}(\boldsymbol{K})$ è ancora assiomatizzabile. Questo è il caso della classe $\boldsymbol{K}$ dei gruppi abeliani: i gruppi abeliani e.c. sono quelli divisibili e contenenti infiniti elementi di periodo p per ogni primo p. Così $\mathcal{E}(\boldsymbol{K})$ è assiomatizzabile (Eklof-Sabbagh [ES]).

Sia $\boldsymbol{K}$ una classe assiomatizzabile, e sia T la sua teoria. Se $\mathcal{E}(\boldsymbol{K})$ è assiomatizzabile, $T^\star = Th(\mathcal{E}(\boldsymbol{K}))$ si dice un *model-companion* di T. Evidentemente $T \subseteq T^\star$.

Come conseguenza di questa generalizzazione si ha:

1) Una nuova dimostrazione del Nullstellensatz di Hilbert in una forma molto più nitida che mette in risalto l'essenza dei concetti impiegati.

2) Una nuova dimostrazione del 17° problema di Hilbert: se $\mathcal{K}$ è un qualunque campo ordinato, una frazione razionale $f(x_1, \ldots, x_n) \in K(x_1, \ldots, x_n)$ si dice *semidefinita positiva* se e solo se per ogni sequenza $\vec{a}$ in K (per cui $f(\vec{a})$ è definita), si ha $f(\vec{a}) \geqslant 0$. Esempi di frazioni razionali semidefinite sono le somme di quadrati di $K(\vec{x})$. Il 17° problema di Hilbert chiede di provare il contrario quando $\mathcal{K}$ è il campo ordinato dei reali. Artin risolse positivamente la questione per ogni campo reale chiuso.

3) Dimostrazione di Ax-Kochen della congettura di Artin, considerando i campi p-adicalmente chiusi ovvero i campi p-adici esistenzialmente chiusi.

Congettura di Artin: Se n, d sono interi positivi con $n > d^2$, ogni polinomio in n variabili di grado d in $\boldsymbol{Q}_p$ ha una soluzione non banale in $\boldsymbol{Q}_p$ per ogni primo p.

Ax-Kochen (1965) [AKa, AKb, AKc] e Eršov (1965) [E65] provarono che fissati n, d, la congettura di Artin è vera in $\boldsymbol{Q}_p$, per ogni primo p, salvo al più un numero finito. Un controesempio di Teijanian (1966) [Te] mostra come questo sia il miglior risultato possibile.

Importante è anche la seguente applicazione all'algebra differenziale.

DEFINIZIONE 3. – *Sia F un campo. Una derivazione su F è una mappa additiva δ su F tale che per ogni $x, y \in F$*

$$\delta(xy) = x\delta(y) + y\delta(x).$$

Un campo differenziale (*di caratteristica* 0) *è un campo con una derivazione.*

Il nostro linguaggio è allora $L_d = \{0, 1, +, \cdot, -, \delta\}$.

Un esempio di campo differenziale è $(\mathcal{K}(x), d/dx)$ delle funzioni razionali in x a coefficienti nel campo $\mathcal{K}$ e d/dx è l'usuale operazione di derivata.

Invece di polinomi (algebrici) $f(x) \in K[x]$ si considerano polinomi differenziali in x: si tratta di polinomi nelle indeterminate $x, Dx, \ldots, D^n x, \ldots$ per n naturale. Per ogni tale polinomio possiamo considerare il grado di $f(x)$ (assoluto, o relativo a x, Dx, ...), ma anche l'ordine di $f(x)$, cioè il massimo naturale n tale che $D^n x$ occorre significativamente in $f(x)$, se tale n esiste, e -1 altrimenti.

Robinson ([R]) dimostra che la teoria T dei campi differenziali ha un model companion $T^\star$ e chiama *campo differenzialmente chiuso* un modello di $T^\star$, puntualizzando che precedentemente non era noto in algebra differenziale nessun concetto di chiusura di un campo differenziale.

Nel 1968 L. Blum ([Bl]) trovò un bell'insieme di assiomi per la teoria dei campi differenzialmente chiusi di caratteristica 0 (DCF_0) che consistono di

– assiomi di campo differenziale di caratteristica 0

– lo schema asserente che per ogni scelta di $f(x)$, $g(x)$, polinomi differenziali non nulli tale che l'ordine di f è maggiore dell'ordine di g, esiste $a \in K$ tale che $f(a) = 0$, $g(a) \neq 0$.

Per quanto riguarda il concetto di chiusura differenziale, da proprietà modellistiche, che sarebbe lungo spiegare, segue l'esistenza di una «minima» estensione $\widetilde{F}$ differenzialmente chiusa di un qualunque campo di caratteristica 0. Per un risultato generale di S. Shelah [Sh] del 1972, $\widetilde{F}$ è unico, così può essere chiamato la *chiusura differenziale* di F.

Corrispondenti e più delicati risultati furono trovati in caratteristica p [W73, W74].

Questo allora è un esempio in cui la logica aiuta l'algebra a trovare nuovi concetti. È però da osservare che tuttora non si hanno esempi concreti di campi differenzialmente chiusi e che tuttavia il concetto è importante ed ha un'applicazione significativa, che citerò successivamente.

A questo punto diamo altri due esempi di chiusure.

La teoria dei *campi separabilmente chiusi* risale ad Eršov ([E67]).

Sia K un campo. Un polinomio a coefficienti in K di grado $\geqslant 1$ si dice *separabile* se e solo se $f(x)$ non ha radici multiple nella chiusura algebrica di K. Un campo K è separabilmente chiuso se ogni polinomio separabile ha una radice in K. Sia SCF la relativa teoria. Ovviamente nel caso di caratteristica 0 la teoria coincide con la teoria ACF_0. Invece in caratteristica prima p, esistono campi separabilmente chiusi e non algebricamente chiusi, ed anzi si prova che un campo K è algebricamente chiuso se e solo se K è separabilmente chiuso e $K = K^p$ (cioè il morfismo di Frobenius è suriettivo).

Il secondo esempio è quello dei *campi algebricamente chiusi con automorfismo*. Nella letteratura, un campo *delle differenze* (Ritt 1930) è un campo con un monomorfismo σ. Macintyre, Van den Dries e C. Wood (cfr. [M97]) descrissero il model companion della teoria dei campi delle differenze provandone diversi risultati (decidibilità, descrizione dei completamenti ecc.). Questa teoria è chiamata *ACFA*, i suoi modelli sono le strutture $\mathcal{K}$ tali che

– $\mathcal{K}$ è un campo algebricamente chiuso

– $\sigma \in Aut(\mathcal{K})$

– Se U e V sono varietà definite su $\mathcal{K}$, con $V \subseteq U \times \sigma(U)$ che si proietta genericamente su U e $\sigma(U)$, allora c'è una n-pla in $\mathcal{K}$ tale che $(a, \sigma(a)) \in V$.

(tutte proprietà che si esprimono nel linguaggio $L = \{0, 1, +, \cdot, -, \sigma\}$.)

Chatzidakis e Hrushovski ([CH, CHP]) hanno approfonditamente studiato *ACFA*, e la sua teoria dei modelli, con specifico riferimento a problemi di indipendenza e dimensione. Hrushovski ([H96]) e, indipendentemente Macintyre ([M9x]) hanno provato di recente che *ACFA* è la teoria degli ultraprodotti di strutture $(\mathcal{K}_p, \sigma_q)$ dove p è un primo, q una sua potenza, $\mathcal{K}_p$ la chiusura algebrica di $\boldsymbol{F}_p$ e σ_q: $x \to x^q$ una potenza del morfismo di Frobenius $x \to x^p$.

3. – La congettura di Mordell-Lang.

La congettura di Mordell-Lang è un problema della Geometria Diofantea, la quale si interessa in generale di soluzioni di sistemi di polinomi a coefficienti in $\boldsymbol{Q}$, o anche in una sua estensione finitamente generata $\mathcal{F}$. Il caso più semplice è quello in cui $\mathcal{F}$ è un ampliamento di $\boldsymbol{Q}$ di grado finito (cioè un campo di numeri). In questo ambito Mordell propose nel 1922 un problema sulla finitezza del numero dei punti razionali su una curva di genere ≥ 2. Faltings [F83] risolse positivamente la questione nel 1983. Il problema di Mordell produsse una lunga serie di generalizzazioni, principalmente dovute a Lang. Ad esempio la congettura originaria può riformularsi

Una curva di genere almeno 2 su un campo di numeri interseca un sottogruppo finitamente generato della sua jacobiana in un insieme finito.

La congettura di Mordell fu formulata per campi di funzioni da Lang nel 1960 e in questa versione fu provata da Manin in caratteristica 0 nel 1963 [Ma63] e in caratteristica prima da Samuel [Sa66]. Una congettura collegata è quella di Manin-Mumford che afferma che una curva di genere ≥ 2 interseca l'insieme dei punti di torsione della sua jacobiana in un insieme finito (la congettura fu provata da Raynaud nel 1982, [Ra83]). Questo portò a una congettura più generale in cui si sostituisce la jacobiana con una varietà abeliana, la curva con una sottovarietà abeliana e il gruppo finitamente generato o di torsione con il gruppo dei punti di divisione di un gruppo finitamente generato Γ.

Una ulteriore generalizzazione fu fatta a varietà semi-abeliane (ci sono ottime referenze geometriche [La91, Hi88] per descrivere la storia delle successive congetture e [24] per le relazioni con la teoria dei modelli).

Il teorema provato da Hrushovski ([H96]) dice (nella sua versione più debole)):

TEOREMA 4. – *Siano A una varietà abeliana su un campo algebricamente chiuso $\mathcal{K}$ (di caratteristica arbitraria), Γ un sottogruppo finitamente generato di $A(\mathcal{K})$, X una sottovarietà di A. Assumiamo che*

($\star$) *A non ha nessuna immagine omomorfa non banale definita su un campo finito o un campo di numeri.*

Denotiamo

$$\tilde{\Gamma} = \left\{ g \in \Gamma : \exists m \in \boldsymbol{Z},\, m > 0,\, mg \in \Gamma((m,\, p) = 1 \text{ se } car\, \mathcal{K} = p > 0) \right\} .$$

Allora la chiusura di Zariski di $X \cap \tilde{\Gamma}$ è unione finita di classi laterali di gruppi sottovarietà di A.

Nel caso $car\, \mathcal{K} = 0$, ($\star$) non è necessaria (Vojta [V], Faltings [F94]) e c'è una precedente dimostrazione di Buium [Bu92] che fa uso di algebra differenziale. Per $car\, \mathcal{K} = p > 0$ la dimostrazione di Hrushovski è la prima ottenuta.

Accenniamo all'idea: si guarda alla struttura $(A,\, +,\, \Gamma,\, X)$; la si interpreta in opportuni campi differenzialmente chiusi (cfr. Buium), o separabilmente chiusi se $car\, \mathcal{K} = p > 0$.

Si usano

– teoria dei modelli dei campi differenzialmente (separabilmente) chiusi;

– strumenti tipici di Teoria dei Modelli (strutture minimali, geometrie di Zariski, tricotomia di Zil'ber ecc.).

Il risultato ha aperto la strada ad una serie di contributi in Geometria Diofantea (Pillay, Scanlon, Hrushovski ...). È da notare che l'approccio di Hrushovski permette il computo di esplicite limitazioni sulle congetture in oggetto, ed altre collegate (Manin-Mumford) [H96b].

4. – La teoria dei modelli dei moduli.

Questa è un'altra applicazione della teoria dei Modelli all'Algebra ed è un settore in cui si sono ottenuti risultati anche qui in Italia. Ho bisogno di un minimo di nozioni tecniche (cfr. il libro di Prest [P] per maggiori dettagli).

Sia R un anello (con unità 1). Il linguaggio $L_R = \left\{ +,\, -,\, 0, \{r\}_{r \in R} \right\}$ per gli R-moduli è il linguaggio dei gruppi additivi con l'operazione unaria r di moltiplicazione per r (per ogni $r \in R$). Sia T_R la teoria degli R-moduli (destri) facilmente assiomatizzabile in L_R. Una immersione di moduli di A in B è detta *pura* se ogni sistema lineare

$$\bigwedge_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} x_i r_{ij} = a_j \quad r_{ij} \in R\,, \qquad a_j \in A\,,$$

che ha una soluzione in B ha anche una soluzione in A.

Un modulo N è *puro-iniettivo* (o *algebricamente compatto*) se ogni immersione pura si fattorizza attraverso N.

Come esempi di moduli puri iniettivi possiamo citare ogni modulo finito, oppure per $R = \boldsymbol{Z}$ il completamento p-adico $\widehat{\boldsymbol{Z}}_{(p)}$ della localizzazione $\boldsymbol{Z}_{(p)}$ di $\boldsymbol{Z}$ a p.

Ogni modulo M ha un *involucro* $\overline{M}$ puro-iniettivo in cui è immerso in modo puro, che è puro-iniettivo e «minimale». Si può vedere, per esempio, che $\widehat{\boldsymbol{Z}}_{(p)}$ è anche l'involucro puro iniettivo di $\boldsymbol{Z}_{(p)}$.

C'è un teorema di struttura per i moduli puri-iniettivi ([Fi, Z]:

TEOREMA 5 (Fisher-Ziegler). – *Se N è puro-iniettivo, allora si decompone in uno e in un sol modo nella forma*

$$\overline{\bigoplus_i U_i} \oplus E$$

dove E è privo di addendi diretti indecomponibili e, per ogni i, U_i è indecomponibile puro-iniettivo. Inoltre M è elementarmente equivalente a $\bigoplus_i U_i$.

Per i due fatti sopra citati l'interesse della teoria degli R- moduli si accentra sugli R-moduli puri-iniettivi indecomponibili.

Si può definire una topologia (*Spettro di Ziegler Zg_R*) i cui punti sono proprio le classi di isomorfismo degli R-moduli puri-iniettivi indecomponibili. Inoltre dato $f : A \to B$, morfismo di R-moduli finitamente presentati, poniamo

$$(f) = \{N \in Zg_R \colon \text{c' è un morfismo A} \to \text{N che non si fattorizza attraverso } f\}\,.$$

Come f varia, questi insiemi formano una base di aperti per la topologia di Ziegler. Questa topologia è compatta, raramente separata.

Nel caso di $R = \boldsymbol{Z}$ i punti di $Zg_{\boldsymbol{Z}}$ sono, per p che varia tra i primi, $\boldsymbol{Z}/p^n\boldsymbol{Z}$ (che sono punti isolati), $\overline{\boldsymbol{Z}}_{(p)}$, $\boldsymbol{Z}_{p^\infty}$, $\boldsymbol{Q}$.

C'è un modo più strettamente logico di definire lo spettro di Ziegler. Una *pp-formula* $\varphi(v_1)$ è una formula del tipo

$$\exists v_2 \ldots \exists v_n \bigwedge_{i=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} v_i r_{ij} = 0 \qquad r_{ij} \in R\,.$$

Dato un modulo M, $\varphi(M)$, l'insieme degli elementi di M che soddisfano φ, è un sottogruppo di M (*sottogruppo pp-definibile*). Ora, siano date due pp-formule

$\varphi(v_1)$, $\psi(v_1)$, tale che $\varphi(M)$ è sottogruppo di $\psi(M)$ per ogni modulo M, allora poniamo

$$(\varphi/\psi) = \{N \in Zg_R \colon \psi(N) < \varphi(N)\}\,.$$

Prendiamo gli insiemi (φ/ψ) al variare di φ e ψ come una base di aperti di una topologia per Zg_R.

Questa topologia è stata usata sia in algebra (Ringel, Krause ...) che in problemi di decidibilità (Marcja, Point, Prest, Toffalori, Ziegler ...) in quanto se Zg_R è conosciuta esplicitamente, la teoria degli R-moduli è decidibile. Recenti lavori di Marcja, Prest e Toffalori sono indirizzati a dare una esplicita descrizione della topologia di Ziegler di moduli su anelli di gruppo.

A questo punto sono costretta, per mancanza di tempo, a sacrificare moltissime altre applicazioni, come le teorie o-minimali, le teorie debolmente o-minimali, il teorema di Wilkie ed altro (cfr. per maggiori informazioni [MT] e [To]) per puntualizzare invece il ruolo della teoria dei modelli oggi.

5. – Riflessione finale.

Riprendiamo alcune osservazioni dell'inizio. Consideriamo sottoinsiemi «buoni» dello spazio euclideo $\boldsymbol{R}^n$ definiti da condizioni come

$$f_1(\vec{x}) = f_2(\vec{x}) = \ldots f_k(\vec{x}) = 0\,, \qquad g_1(\vec{x}) > 0\,,\ \ldots,\ g_l(\vec{x}) > 0$$

per funzioni «buone» $f_1, \ldots, f_k, g_1, \ldots, g_l$ non necessariamente polinomiali. Formiamo operazioni logiche, geometriche e topologiche elementari su questi insiemi: prendiamo cioè unioni, intersezioni, complementi, chiusure, prodotti cartesiani e proiezioni in spazi euclidei di dimensione più bassa. Continuando a ripetere queste operazioni, può presentarsi una delle seguenti situazioni:

1) Dopo un limitato numero di queste operazioni, diciamo dopo proiezioni di unioni finite di insiemi, la situazione si stabilizza e non si creano nuovi insiemi. Il Teorema di Seidenberg-Tarski ci assicura che questo è il caso per funzioni polinomiali, e ha come corollario un algoritmo di decisione per la geometria elementare.

2) Nascono insiemi sempre più complicati (es: Boreliani di complessità crescente).

La Teoria dei Modelli dà idee per «controllare» la situazione. Abbiamo detto che, ai suoi albori, gli interessi di Tarski erano prevalentemente legati a questioni di decidibilità ed eliminazione dei quantificatori, ma avevano anche sottili implicazioni geometriche. Lo stesso può dirsi di A. Robinson.

Il lavoro di Shelah e Hrushovski ha sottolineato ed approfondito queste implicazioni. Il concetto base è quello di *insieme definibile* in una struttura $\mathfrak{A}$.

Come già detto in precedenza, si tratta delle soluzioni in $\mathcal{A}$, o in una sua potenza cartesiana, di una formula del linguaggio. Al livello più semplice, i definibili si riducono alle varietà determinate da sistemi di equazioni (algebriche, differenziali, di differenza, disequazioni, a seconda del linguaggio). Ma essi includono anche unioni, intersezioni, complementari, proiezioni, fibre .... Anzi, è possibile dare una definizione puramente algebrica della classe dei definibili, che rifugge da ogni preliminare logico e si basa su questo approccio.

Riesplorando in questo ambito alcuni esempi sopra proposti, vediamo quanto segue:

(i) $(\boldsymbol{N}, +, \cdot)$: si parte da una struttura geometrica minima; ma il teorema di incompletezza di Gödel mostra che i definibili formano una classe assai vasta, con una gerarchia successiva di complicazioni, adatta più a Teoria della recursione o a Teoria descrittiva degli Insiemi che a Geometria o Teoria dei Numeri: è il caso 2. sopra considerato (che si estende a $(\boldsymbol{Z}, +, \cdot)$, $(\boldsymbol{Q}, +, \cdot)$, come già detto).

(ii) $(\boldsymbol{R}, +, \cdot)$: qui i definibili sono esattamente i semialgebrici (ambiente ideale per la geometria, topologia, etc.)

(iii) $(\boldsymbol{C}, +, \cdot)$: qui definibile = costruibile, siamo nella situazione di (ii).

(iv) Un campo differenzialmente chiuso di caratteristica 0: si prova che i definibili sono le combinazioni booleane finite di chiusi di Kolchin (cioè varietà definite da sistemi di equazioni con derivate).

(v) R-moduli: i definibili sono combinazioni booleane di laterali di sottogruppi pp-definibili.

(vii) $(\boldsymbol{Q}_p, +, \cdot)$: ancora, ottima caratterizzazione dei definibili (dovuta a Macintyre e basata su Ax-Kochen).

(vii) campi di differenze e.c.: situazione analoga.

Esempi si possono attingere anche uscendo dai confini rigorosamente algebrici per estendersi alla geometria analitica locale:

(viii) $(\boldsymbol{R}, +, \cdot)$ con la funzione esponenziale $x \to e^x$ (Wilkie e altri).

(ix) $(\boldsymbol{R}, +, \cdot)$ con funzioni analitiche opportunamente ristrette a $[0, 1]^n$ (Denef, Van den Dries).

In tutti questi casi (eccetto (i)), si deve (parole di Hrushovski) «forse pagare un alto costo per comprendere i fondamenti ... ma si ottiene poi un vero paradiso geometrico in cui costruire molta geometria senza il pericolo di incontrare patologie».

Così non sembra inappropriato presentare la moderna Teoria dei Modelli, a livello di slogan secondo la definizione di Van den Dries:

– Teoria dei Modelli = Matematica Docile, poi rivista e corretta da Hrushovski

– Teoria dei Modelli = geografia della Matematica Docile (Hrushovski).

Al di là della promozione pubblicitaria, la Teoria dei Modelli si propone come ricerca delle strutture in cui sviluppare una buona geometria, e del modo migliore sotto cui avvicinarsi a queste strutture. La teoria dei Modelli è in grado di sviluppare *la teoria generale di ciò che è vero in 1* e sembra essere un terreno ideale per sviluppare la «*topologie moderée*» di Grothendieck, come accennata in «Esquisse d'un Programme» del 1984.

La Congettura di Mordell-Lang è chiaro esempio dell'applicabilità della Teoria dei Modelli e della sua affidabilità. A proposito di Mordell-Lang possiamo citare ancora Hrushovski (stavolta troppo modesto), «la dimostrazione non richiede nessuna ingegnosità, ma segue naturalmente da considerazioni di teoria dei modelli». L'opzione di Hrushovski circa l'elementarietà della dimostrazione è difficilmente condivisibile. Ma il ruolo della Teoria dei Modelli sembra altrettanto difficilmente trascurabile.

Grazie.

REFERENCES

[AKa] J. AX - S. KOCHEN, *Diophantine problems over local fields I*, Am. J. Math., **87** (1965), 605-630.

[AKb] J. AX - S. KOCHEN, *Diophantine problems over local fields II: A complete set of axioms for p-adic number theory*, Am. J. Math., **87** (1965), 631-648.

[AKc] J. AX - S. KOCHEN, *Diophantine problems over local fields III: Decidable fields*, Ann. of Math., **83** (1966), 437-456.

[Bl] L. BLUM, *Generalized Algebraic Theories*, Thesis (1968) M.I.T. Press, Cambridge, MA.

[Bu92] A. BUIUM, *Intersections in jet spaces and a conjecture of S. Lang*, Annals of Math., **136** (1992), 557-567.

[CH] Z. CHATZIDAKIS - E. HRUSHOVSKI, *Model Theory of difference fields*, Trans. Amer. Math. Soc., **351** Nr. 8 (1999) (in corso di stampa).

[CHP] Z. CHATZIDAKIS - E. HRUSHOVSKI - Y. PETERZIL, *Model Theory of difference fields II* (preprint).

[ES] P. EKLOF - G. SABBAGH, *Model Completions and Modules*, Ann. Math. Logic, **2** (1970-71), 251-295.

[E65] YU. L. ERŠOV, *On the elementary theory of maximal normed fields*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, **165** (1965) (Traduzione inglese in Sov. Math. Dokl., 1390-1393).

[E67] YU. L. ERŠOV, *Fields with a solvable theory*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, **174** (1967), 19-20 (Traduzione inglese in Sov. Math. Dokl., 8, 575-576).

[F83] G. FALTINGS, *Endlichkeitssatze fur abelsche Varietaten uber Zahlkorpen*, Inventiones Math., **73** (1983), 349-366.

[F94] G. FALTINGS, *The general case of S. Lang's conjecture*, in *Barsotti Symposium in Algebraic Geometry*, Academic Press, 1994.

[Fi] E. FISHER, *Abelian structures*, Yale University 1974/75.

[Hi88] M. HINDRY, *Autour d'une conjecture de Serge Lang*, Inventiones Math., **94** (1988), 575-603.

[H96] E. HRUSHOVSKI, *The first order of the Frobenius* (preprint 96).

[H96a] E. HRUSHOVSKI, *The Mordell Lang conjecture for function fields*, Journal of AMS, **9** (1996), 667-690.

[H96b] E. HRUSHOVSKI, *Difference fields and the Manin-Mumford conjecture* (preprint 1996).

[La91] S. LANG, *Number Theory III: Diophantine Geometry*, Encyclopedia of Math. Sciences, **60**, Springer Verlag (1991).

[M] A. MACINTYRE, *On algebraically closed groups*, Ann. Math., **95** (1972), 53-97.

[M97] A. MACINTYRE, *Generic automorphisms of fields*, Ann. P. Appl. Logic, 88 (1997), 165-180.

[M9x] A. MACINTYRE, *Nonstandard Frobenius* (in preparazione).

[Ma63] YU. MANIN, *Rational points of algebraic curves over function fields*, Izv. Akad. Nauk SSSR, **27** (1963), 1395-1440 (Tranlations of AMS, **344** (1966), 189-234).

[MT] A. MARCJA - C. TOFFALORI, *Introduzione alla Teoria dei Modelli*, Quaderni dell'Unione Matematica Italiana 43, Pitagora Editrice, Bologna (1998).

[Pi97] A. PILLAY, *Model theory and diophantine geometry*, Bull. Amer. Math. Soc., **34** (1997), 405-422.

[P] M. PREST, *Model Theory and Modules*, London Mathematical Society Lecture Notes Series 130, Cambridge University Press (1988).

[Ra83] M. RAYNAUD, *Sous-variétés d'une variété abélienne et points de torsion*, in *Arithmetic and Geometry*, vol. I, Birkhauser (1983).

[R] A. ROBINSON, *On the concept of a differentially closed field*, Bull. Res. Council Israel, sect. F, **8F** (1959), 113-128.

[Sa66] P. SAMUEL, *Complements a un article de Hans Grauert sur la conjecture de Mordell*, Pub. Math. IHES, **29** (1966), 55-62.

[S] A. SEIDENBERG, *A new decision method for elementary algebra*, Ann. Math. sec. 2, **60** (1954), 365-374.

[Sh] S. SHELAH, *Uniqueness and characterization of prime models over sets for totally transcendental first-order theories*, J. Symbolic Logic, **37** (1972), 107-113.

[T48] A. TARSKI, *A decision method for elementary algebra and geometry* (prepared for publication by J. C. C. Mc Kinsey), U.S. Air Force Project RAND, R-109, the RAND Corporation, Santa Monica, California (1948), iv+60 pp.

[T 54] A. TARSKI, *Contributions to the Theory of Models I*, Indag. Math., **16** (1954), 572-581.

[Te] G. TERJANIAN, *Un contre-example a une conjecture d'Artin*, C.R. Acad. Sci. Paris Ser. A, **262** (1966), 612.

[To] C. TOFFALORI, *Perché Hrushovski e Wilkie hanno vinto gli ultimi premi Karp*, Quaderni Dipartimento di Matematica Università di Camerino **2** (1999).

[V] P. VOJTA, *Integral points on subvarieties of semi-abelian varieties*, Inventiones Math.

[W73] C. WOOD, *The model theory of differential fields of characteristic* $p \neq 0$, Proc. Am. Math. Soc., **40** (1973), 577-584.

[W74] C. WOOD, *Prime model extensions for differential fields of characteristic* $p \neq 0$, J. Symbolic Logic, **39** (1974), 469-477.

[Z] M. ZIEGLER, *Model theory of modules*, Ann. Pure Appl. Logic, **26** (1984), 149-213.

Dipartimento di Matematica «U. Dini», Viale Morgagni 67/A, I-50134 Firenze, Italy
E-mail: marcja@math.unifi.it

Pervenuta in Redazione
il 27 febbraio 2000