Bollettino Unione Matematica Italiana

Guido Trombetti

Metodi di simmetrizzazione nelle equazioni alle derivate parziali

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-B** (2000), n.3, p. 601–634.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3B_3_601_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
(8) 3-B (2000), 601-634

Metodi di simmetrizzazione nelle equazioni alle derivate parziali.

GUIDO TROMBETTI (*)

Summary. – *A survey of the fundamental ideas which are the base of the socalled symmetrization method; a priori estimates in partial differential equations.*

Ringrazio il Comitato Scientifico del XVI Congresso dell'UMI per l'onore che mi ha riservato invitandomi a tenere questo intervento.

L'obiettivo che mi sono posto nel preparare questa conferenza è di illustrare le idee fondamentali che sono alla base del cosiddetto metodo di simmetrizzazione. Così come mi è stato richiesto tale esposizione sarà di carattere generale, diretta ad un pubblico di non specialisti e, pertanto, cercherò di semplificare al massimo la trattazione.

Una bibliografia completa fino alla fine degli anni '40 è nel testo di Polya-Szegö [171]; vaste bibliografie sono in [19], [37], [46], [50], [87], [124], [147], [154], [161], [203], [204], [208], [209], [210].

Ringrazio Angela Alberico e Barbara Brandolini per aver riletto il manoscritto e per avermi aiutato a raccogliere la bibliografia.

1. – Classiche congetture.

Le tecniche di simmetrizzazione sono state usate in modo sistematico nella ricerca di stime per quantità rilevanti da un punto di vista fisico-matematico o geometrico. Partirò da alcuni risultati classici che per primi sono stati trattati con tali metodi.

Ricordiamo tre celebri congetture.

St. Venant (1856) [186].

Tra tutte le travi elastiche con assegnata area della sezione quella di sezione circolare ha la rigidità torsionale più grande.

(*) Conferenza tenuta a Napoli il 15 settembre 1999 in occasione del XVI Congresso U.M.I.

Lord Rayleigh (1877) [184].

Tra tutte le membrane elastiche di densità costante e fissata area quella circolare ha la frequenza principale più piccola.

Poincaré (1903) [168].

Tra tutti i solidi di assegnato volume la sfera ha la capacità elettrostatica più piccola.

La congettura di Lord Rayleigh fu dimostrata da Faber [94], Krahn [132], Tonelli [211], quella di Poincaré da Szegö [195]. Nel 1948 Pólya [169] fornì una dimostrazione estremamente semplice ed elegante delle tre congetture enunciate utilizzando la simmetrizzazione di Steiner.

2. – Simmetrizzazione di Steiner.

La nozione di simmetrizzazione fu introdotta da Steiner nel 1882 in [194]. Seguendo Pólya [169] diamo un'idea di tale nozione in $\mathbb{R}^2$ ed in $\mathbb{R}^3$.

Detto Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^2$, vogliamo simmetrizzare Ω rispetto ad una retta; a tal fine fissiamo una retta r e supponiamo, per semplicità, che ogni retta ortogonale ad r intersechi Ω lungo un unico segmento. Intuitivamente pensiamo all'insieme Ω come ad una unione di segmenti paralleli tra loro ed ortogonali alla retta r; facciamo scorrere ogni segmento lungo la retta su cui esso giace fino a raggiungere la posizione in cui esso è bisecato da r. I segmenti nella nuova posizione formano un sottoinsieme $\Omega^\#$ del piano, che è detto simmetrizzato di Ω rispetto ad r.

È possibile dimostrare che la simmetrizzazione

a) lascia l'area di Ω invariata;

b) fa diminuire il perimetro di Ω.

Se Ω è un aperto limitato dello spazio a tre dimensioni si opera in modo analogo per simmetrizzare Ω rispetto ad un piano π. Supponiamo per semplicità che ogni retta ortogonale a π intersechi Ω lungo un unico segmento. Pensiamo intuitivamente all'insieme Ω come ad una unione di segmenti paralleli tra loro ed ortogonali al piano π; facciamo scorrere ogni segmento lungo la retta su cui esso giace fino a raggiungere la posizione in cui esso è bisecato dal piano π. I segmenti nella nuova posizione formano un sottoinsieme $\Omega^\#$ di $\mathbb{R}^3$, che è detto simmetrizzato di Ω rispetto al piano π.

È possibile dimostrare che la simmetrizzazione rispetto ad un piano

a) lascia il volume di Ω invariato;

b) fa diminuire l'area della superficie che forma il bordo di Ω.

In $\mathbb{R}^3$ si può anche simmetrizzare un aperto limitato Ω rispetto ad una retta r riguardandolo come consistente di parti di piani ortogonali ad r e trasformando ognuna di tali parti in un cerchio di egual misura giacente sul medesimo piano e avente centro sulla retta r.

Come si possa «simmetrizzare» un insieme di punti in $\mathbb{R}^k$ è facile da intuire.

Vogliamo adesso simmetrizzare una funzione.

Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^2$ e $z = f(x, y)$ una funzione definita in Ω, non negativa e nulla sulla frontiera di Ω. Simmetrizzare il cilindroide di base Ω relativo a f, rispetto al piano (y, z), significa simmetrizzare ogni insieme di livello di f rispetto all'asse y. In tal modo si costruisce il grafico di una nuova funzione $f^{\#}(x, y)$ definita in $\Omega^{\#}$, non negativa e nulla sulla frontiera di $\Omega^{\#}$; $f^{\#}$ è detta simmetrizzata di Steiner di f.

Poiché la simmetrizzazione lascia invariati i volumi, si ha ovviamente

$$\int_{\Omega} f(x, y)\, dx\, dy = \int_{\Omega^{\#}} f^{\#}(x, y)\, dx\, dy\ ;$$

più in generale

$$\int_{\Omega} |f(x, y)|^p\, dx\, dy = \int_{\Omega^{\#}} |f^{\#}(x, y)|^p\, dx\, dy$$

con $p \geqslant 1$ e

$$\sup f = \sup f^{\#}.$$

Per quanto detto in precedenza l'area della superficie che delimita il cilindroide relativo ad $f(x, y)$ è maggiore od eguale all'area della superficie che delimita il cilindroide relativo ad $f^{\#}(x, y)$; da qui, supponendo f ed $f^{\#}$ abbastanza regolari (ad esempio lipschitziane), e ricordando che si ha

$$\text{area}(\Omega) = \text{area}(\Omega^{\#}),$$

consegue, sempre seguendo Pólya [169],

$$\int_{\Omega} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dx\, dy \geqslant \int_{\Omega^{\#}} \sqrt{1 + (f_x^{\#})^2 + (f_y^{\#})^2}\, dx\, dy.$$

Sostituendo f con εf si ha

$$\int_{\Omega} \sqrt{1 + \varepsilon^2(f_x^2 + f_y^2)}\, dx\, dy \geqslant \int_{\Omega^{\#}} \sqrt{1 + \varepsilon^2((f_x^{\#})^2 + (f_y^{\#})^2)}\, dx\, dy$$

e sviluppando in serie

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega}(f_x^2+f_y^2)\,dx\,dy+\varepsilon^2[\dots]\geqslant\frac{1}{2}\int_{\Omega^\#}[(f_x^\#)^2+(f_y^\#)^2]\,dx\,dy+\varepsilon^2[\dots].$$

Per $\varepsilon\to 0$ si ottiene il principio di Pólya

$$\int_{\Omega}|\nabla f|^2\,dx\,dy\geqslant\int_{\Omega^\#}|\nabla f^\#|^2\,dx\,dy\,.$$

In $\mathbb{R}^3$ valgono, ovviamente, risultati analoghi.

3. – La dimostrazione di Pólya delle tre congetture.

Con una semplice applicazione delle precedenti proprietà Pólya [169] ottiene il seguente risultato.

PROPOSIZIONE 1. – *Sotto l'effetto della simmetrizzazione di Steiner*

a) *cresce la rigidità alla torsione*;

b) *decresce la frequenza principale*;

c) *decresce la capacità.*

Da tale risultato conseguono in particolare le tre congetture enunciate osservando che, attraverso una opportuna successione di simmetrizzazioni di Steiner, Ω si trasforma in un cerchio di uguale area, se si opera nel piano, in una sfera di egual volume, se si opera nello spazio.

La dimostrazione di a) è una semplice conseguenza della caratterizzazione variazionale della rigidità alla torsione (relativa al caso di un aperto semplicemente connesso) che denotiamo con $P(\Omega)$. Infatti

$$\frac{1}{P(\Omega)}=\min\frac{\int_{\Omega}|\nabla v|^2\,dx}{4\left(\int_{\Omega}v\,dx\right)^2}=\frac{\int_{\Omega}|\nabla w|^2\,dx}{4\left(\int_{\Omega}w\,dx\right)^2}\,,$$

dove il minimo è fatto tra le funzioni «abbastanza regolari» nulle al bordo (precisamente tra le funzioni di $H_0^1(\Omega)$) e w (funzione stress) è la soluzione del problema

$$\begin{cases}-\Delta w=2 & \text{in }\ \Omega\\ w=0 & \text{su }\ \partial\Omega\,.\end{cases}$$

Ne consegue, usando in particolare il principio di Pólya,

$$\frac{1}{P(\Omega)} = \frac{\int_\Omega |\nabla w|^2\,dx}{4\left(\int_\Omega w\,dx\right)^2} \geqslant \frac{\int_{\Omega^\#} |\nabla w^\#|^2\,dx}{4\left(\int_{\Omega^\#} w^\#\,dx\right)^2} \geqslant \frac{1}{P(\Omega^\#)}\,.$$

Per ottenere b) basta ricordare che, denotato con $\lambda_1(\Omega)$ il primo autovalore (cioè il quadrato della frequenza principale) del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega\,, \end{cases}$$

si ha

$$\lambda_1(\Omega) = \min \frac{\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx}{\int_\Omega v^2\,dx} = \frac{\int_\Omega |\nabla \psi|^2\,dx}{\int_\Omega \psi^2\,dx}\,,$$

dove ψ è la prima autosoluzione, cioè ψ è una soluzione non banale del problema

$$\begin{cases} -\Delta \psi = \lambda_1 \psi & \text{in } \Omega \\ \psi = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

e procedere come in a).

Ricordiamo infine che, se Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^3$ il cui complemento indichiamo con $-\Omega$, la capacità elettrostatica di Ω, denotata con $C(\Omega)$, è data da

$$C(\Omega) = \min \frac{\int_{-\Omega} |\nabla v|^2\,dx}{4\pi(\max v)^2} = \frac{1}{4\pi}\int_{-\Omega} |\nabla \chi|^2\,dx\,,$$

dove il minimo è fatto tra le funzioni $O(1/|x|)$ costanti sul bordo di Ω e χ risolve il problema

$$\begin{cases} -\Delta \chi = 0 & \text{in } -\Omega \\ \chi = 1 & \text{su } \partial\Omega \\ \chi = O(1/|x|) & \text{per } |x| \to \infty\,. \end{cases}$$

Si ottiene c) procedendo come in a).

4. – Qualche esempio di stime.

I precedenti risultati hanno stimolato un fiorire di ricerche di stime accurate di grandezze quasi sempre suscettibili di rappresentazioni variazionali. Tali stime sono spesso ottimali, nel senso che diventano eguaglianze in corrispondenza di un particolare insieme (ad esempio una sfera) od in un caso limite. Chi voglia orientarsi su tale tipo di questioni non può, ancora oggi, prescindere dallo straordinario testo di Pólya-Szegö [171] che contiene tutte le idee fondamentali e, come già detto, una bibliografia completa fino al 1950; interessanti articoli di survey sono [122] e [161].

Risultati di vario tipo riguardanti diseguaglianze che coinvolgono la rigidità torsionale, la capacità, il primo autovalore ed altre quantità di interesse fisico-matematico sono contenuti, per esempio, in [26], [27], [28], [29], [30], [31], [32], [33], [34], [40], [41], [42], [43], [56], [59], [68], [69], [72], [83], [99], [118], [120], [121], [125], [126], [141], [142], [152], [156], [158], [162], [166], [170], [172], [176], [188], [189], [192], [196], [197], [202], [212], [223], [224].

Diamo qui qualche semplice esempio di maggiorazione utilizzando le notazioni w, ψ introdotte nel paragrafo precedente.

Partiamo dalla congettura di St. Venant.

La soluzione del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = 2 & \text{in } \Omega^{\#} \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega^{\#} \end{cases}$$

nel cerchio $\Omega^{\#}$ di misura uguale a quella di Ω si scrive

$$u(x) = \frac{|\Omega| - \pi|x|^2}{2\pi}$$

e quindi, ricordando che, come già visto,

$$\frac{1}{P(\Omega)} \geqslant \frac{1}{P(\Omega^{\#})} = \frac{\displaystyle\int_{\Omega^{\#}} |\nabla u|^2 \, dx}{4\left(\displaystyle\int_{\Omega^{\#}} u \, dx\right)^2},$$

si ottiene la stima ottimale

$$P(\Omega) \leqslant \frac{|\Omega|^2}{2\pi}.$$

Un'altra diseguaglianza interessante, che lega il massimo della funzione stress w alla rigidità alla torsione (cfr. [161]), è la seguente

$$P(\Omega) \geqslant 2\pi(\max w)^2;$$

da qui e dalla precedente diseguaglianza si ricava una stima ottimale del massimo della funzione stress

$$\max w \leqslant \frac{|\Omega|}{2\pi}.$$

Più in generale, si può ottenere una sorta di principio di massimo nel piano. Infatti, detta z la soluzione del problema

$$\begin{cases} -\Delta z = 2f & \text{in } \Omega \\ z = 0 & \text{su } \partial\Omega , \end{cases}$$

scrivendo z mediante la funzione di Green ed usando la stima precedente relativa alla funzione stress, si ha

$$\max |z| \leqslant \frac{|\Omega|}{2\pi} \max |f| .$$

Una piccola lista di semplici stime molto eleganti è la seguente (cfr. [129], [130], [131], [160]):

$$\int_\Omega w^q \, dx \geqslant \frac{2\pi}{q+1} (\max w)^{q+1};$$

$$\lambda_1 (\max w)^3 \leqslant \frac{3P(\Omega)}{2\pi};$$

$$\left(\int_\Omega \psi \, dx \right)^2 \geqslant \frac{4\pi}{\lambda_1} \int_\Omega \psi^2 \, dx ;$$

$$P(\Omega)\, \lambda_1^2 \geqslant \frac{\pi}{2} j_0^4 \simeq 16.7\pi ,$$

dove j_0 è il primo zero positivo della funzione di Bessel J_0.

Le precedenti maggiorazioni sono tutte relative al caso in cui Ω è un aperto del piano. Nello spazio la congettura di Poincaré diventa (cfr. [161])

$$C(\Omega) \geqslant [3(\mathrm{vol}\, \Omega)/4\pi]^{1/3}.$$

Le precedenti stime sono state estese in varie direzioni e ciò ha spesso richiesto un uso molto sofisticato dei metodi di simmetrizzazione: il caso di $\mathbb{R}^n$, casi non lineari (ad esempio la «torsional creep»), il caso di domini a connessione multipla in relazione alla rigidità alla torsione etc. (cfr., ad esempio, [15], [76], [130], [157], [159], [161], [163], [164], [165], [171], [199]).

Tra le stime ottimali particolare rilievo merita il risultato sulla migliore costante nella diseguaglianza di Sobolev (cfr. [123], [198])

$$\|u\|_{p^*} \leqslant C\|Du\|_p,$$

dove $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$, $1 < p < n$ e

$$C = \frac{1}{n^{1/p}\sqrt{\pi}}\left(\frac{p-1}{n-p}\right)^{1-1/p}\left\{\frac{\Gamma(1+n/2)\,\Gamma(n)}{\Gamma(n/p)\,\Gamma(1+n/p')}\right\}^{1/n}.$$

Di tale stima daremo in appendice una semplice dimostrazione.

Ci limitiamo qui a ricordare che in questo ultimo ambito si sono avuti molti risultati quali ad esempio quelli relativi al caso delle varietà, degli spazi di Lorentz o degli spazi di Orlicz [1], [7], [8], [13], [35], [36], [64], [65], [146], [173], [216] (cfr. anche [49], [51], [91], [136], [150], [206]).

5. – Equazioni ellittiche.

Le tecniche di simmetrizzazione nello studio delle soluzioni di problemi al contorno per equazioni ellittiche in forma di divergenza sono adoperate per la prima volta da Weinberger in un lavoro [225] in cui si considera il seguente problema di Dirichlet in un aperto Ω di $\mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} -(a_{ij}u_{x_j})_{x_i} = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

nell'ipotesi che i coefficienti a_{ij} siano limitati, misurabili e soddisfino l'ipotesi di ellitticità

$$a_{ij}\xi_j\xi_i \geqslant |\xi|^2, \qquad \forall\xi\in\mathbb{R}^n.$$

Il termine noto è tale da garantire l'esistenza di una soluzione debole del problema.

Weinberger ottiene la migliore costante K nella stima

$$|u(x)| \leqslant K\|f\|_p, \qquad p > \frac{n}{2}.$$

Per ottenere tale risultato si fissa un punto O in Ω e si stima la norma L^p della funzione di Green $G(x) \equiv G(O, x)$, facendo uso dell'ipotesi di ellitticità e della classica diseguaglianza isoperimetrica.

Successivamente Talenti [199] dimostra il primo risultato (che ormai può definirsi classico) di confronto «puntuale» (in un senso che preciseremo in seguito) per le soluzioni del problema di Dirichlet per equazioni ellittiche in forma di divergenza.

A tal fine è necessario premettere alcuni brevi richiami sulla nozione di riordinamento.

6. – Riordinamenti.

Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, $w : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile. Si definiscono:

i) funzione di distribuzione di w

$$\mu_w(t) = |\{x \in \Omega : |w(x)| > t\}|, \qquad t \geq 0 ;$$

ii) riordinamento decrescente di w

$$w^*(s) = \sup\{t \geq 0 : \mu_w(t) > s\}, \qquad s \in (0, |\Omega|),$$

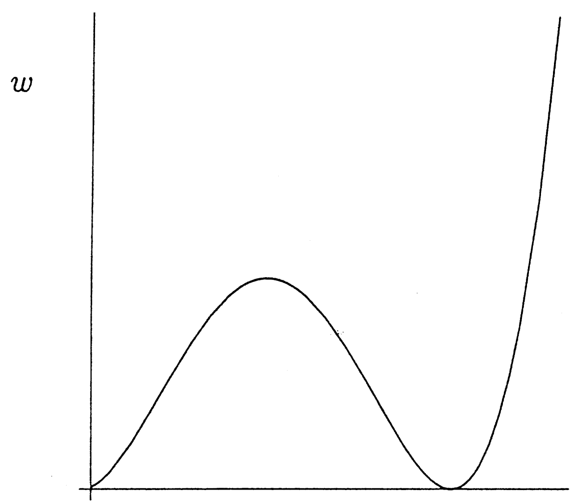
(«grosso modo» $w^* = \mu_w^{-1}$);

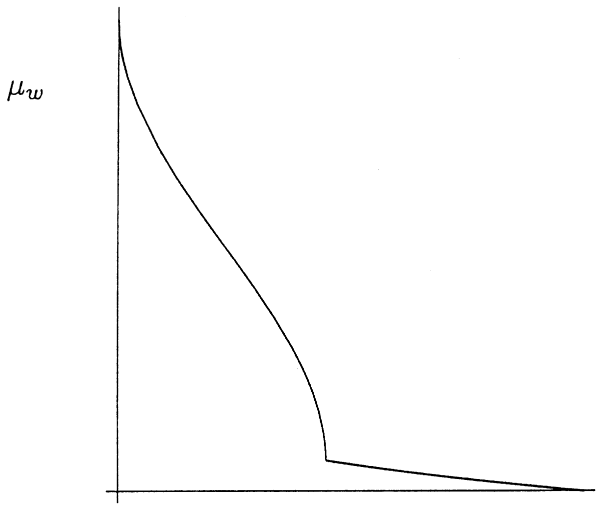
iii) riordinamento sferico decrescente di w

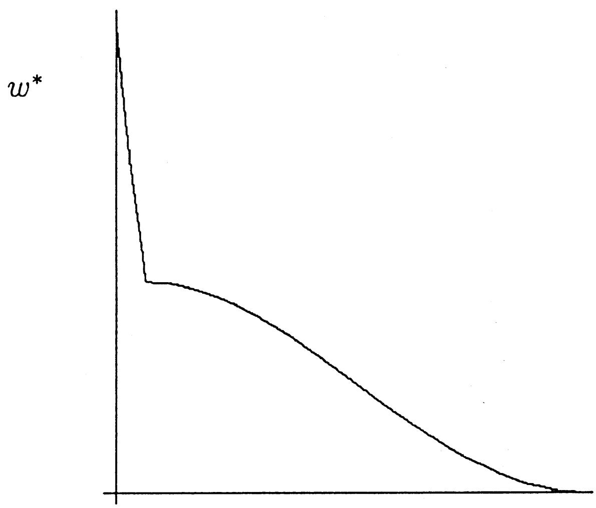
$$w^\#(x) = w^*(C_n |x|^n), \qquad x \in \Omega^\#,$$

dove $C_n = |\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}|$.

A titolo di esempio, di seguito sono riportati i grafici di una funzione w, della sua funzione di distribuzione e del suo riordinamento.







Ricordiamo brevemente alcune proprietà dei riordinamenti. In primo luogo w, $w^\#$ e w^* sono equimisurabili, cioè

$$\mu_w(t) = \mu_{w^*}(t) = \mu_{w^\#}(t), \qquad t \geq 0 ;$$

da cui, per il principio di Cavalieri, segue

$$\|w\|_{L^p(\Omega)} = \|w^*\|_{L^p(0,\,|\Omega|)} = \|w^\#\|_{L^p(\Omega^\#)}, \qquad (1 \leq p \leq \infty);$$

ed anche

$$\int_{|w|>t} |w|\, dx = \int_0^{\mu_w(t)} w^*(s)\, ds\,.$$

Vale inoltre la diseguaglianza di Hardy-Littlewood

$$\int_\Omega |vw|\, dx \leqslant \int_0^{|\Omega|} v^*(s)\, w^*(s)\, ds = \int_{\Omega^\#} v^\# w^\# dx\,;$$

da cui segue, per esempio,

$$\int_E |w|\, dx \leqslant \int_0^{|E|} w^*(s)\, ds = \int_{E^\#} w^\# dx\,, \qquad E \subset \Omega\,.$$

Osserviamo che per confrontare le norme di due funzioni è sufficiente confrontarne le «concentrazioni». Più precisamente, se vale

$$\int_0^s w^*(r)\, dr \leqslant \int_0^s v^*(r)\, dr\,, \qquad s \in (0, |\Omega|)$$

allora

$$\|w\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \|v\|_{L^p(\Omega)}, \qquad 1 \leqslant p \leqslant \infty\,.$$

Infine ricordiamo il principio di Pólya ([67], [133])

$$\int_\Omega |\nabla w|^p\, dx \geqslant \int_{\Omega^\#} |\nabla w^\#|^p\, dx\,, \qquad 1 \leqslant p < \infty\,, \ \ \forall w \in W_0^{1,p}(\Omega)\,.$$

Per uno studio dettagliato delle proprietà dei riordinamenti e per una analisi di molti tipi di simmetrizzazione si rinvia a [19], [38], [39], [46], [53], [62], [63], [67], [77], [84], [89], [90], [92], [93], [110], [111], [119], [124], [134], [147], [153], [171], [185], [187], [190], [191], [193], [205].

OSSERVAZIONE. – In relazione al principio di Pólya va segnalata la memoria di Brothers-Ziemer [67] in cui, tra l'altro, si stabilisce un risultato relativo al caso in cui la diseguaglianza diventa una eguaglianza; su ciò non possiamo intrattenerci dal momento che intervengono nozioni tecniche piuttosto sofisticate.

OSSERVAZIONE. – Si dimostra (cfr., ad esempio, [74], [82]) che l'applicazione che ad una funzione associa il suo riordinamento sferico è continua da L^p in sé; in [81] Coron prova che tale applicazione è continua anche da $W^{1,p}(\mathbb{R})$ in sé; tale risultato non si estende ad $\mathbb{R}^n$, con $n > 1$, senza ulteriori e sofisticate ipotesi [4], [5].

7. – Teorema di Talenti.

Consideriamo ancora il problema

$$\begin{cases} -(a_{ij}u_{x_j})_{x_i} = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

nell'ipotesi che i coefficienti a_{ij} siano limitati, misurabili e soddisfino l'ipotesi di ellitticità

$$a_{ij}\xi_j\xi_i \geqslant |\xi|^2, \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Il termine noto è tale da garantire l'esistenza di una soluzione debole del problema. Il riordinamento di f e la misura di Ω si intendono fissati.

Per semplicità nel seguito supporremo i dati regolari ed inoltre assumeremo $f \geqslant 0$, da cui $u \geqslant 0$.

Gli strumenti che useremo sono i seguenti:

1) integrazione sui sopralivelli di u;
2) teorema della divergenza;
3) formula di co-area [109];
4) diseguaglianza isoperimetrica [85];
5) proprietà dei riordinamenti.

Integrando ambo i membri dell'equazione sull'insieme di livello $\{x \in \Omega : u(x) > t\}$ con $t \geqslant 0$ ed utilizzando in successione la diseguaglianza di Hardy-Littlewood, il teorema della divergenza, l'ipotesi di ellitticità, la diseguaglianza di Cauchy-Schwartz, la formula di co-area e la diseguaglianza isoperimetrica, si ottiene

$$\int_0^{\mu_u(t)} f^*(s)\,ds \geqslant \int_{u>t} f\,dx = \int_{u>t} -(a_{ij}u_{x_j})_{x_i}\,dx =$$

$$= \int_{u=t} a_{ij}u_{x_j}\frac{u_{x_i}}{|\nabla u|}\,d\sigma \geqslant \int_{u=t} |\nabla u|\,d\sigma \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\left(\int_{u=t} d\sigma\right)^2}{\int_{u=t} \frac{1}{|\nabla u|}\,d\sigma} = \frac{\left(\int_{u=t} d\sigma\right)^2}{-\mu'_u(t)} \geqslant \frac{(nC_n^{1/n}\mu_u(t)^{1-1/n})^2}{-\mu'_u(t)}.$$

Quindi

$$\frac{n^2 C_n^{2/n} \mu_u(t)^{2-2/n}}{-\mu'_u(t)} \leqslant \int_0^{\mu_u(t)} f^*(s)\, ds$$

e, dalla definizione di riordinamento, segue

$$(-u^*(s))' \leqslant \frac{1}{n^2 C_n^{2/n} s^{2-2/n}} \int_0^s f^*(r)\, dr$$

da cui si ha

$$u^*(s) \leqslant \frac{1}{n^2 C_n^{2/n}} \int_s^{|\Omega|} \frac{dr}{r^{2-2/n}} \int_0^r f^*(\varrho)\, d\varrho \equiv v^*(s), \qquad s \in (0,\ |\Omega|).$$

Si osserva subito che, posto

$$v(x) = \frac{1}{n^2 C_n^{2/n}} \int_{C_n |x|^n}^{|\Omega|} \frac{dr}{r^{2-2/n}} \int_0^r f^*(\varrho)\, d\varrho \equiv v^*(C_n |x|^n),$$

risulta che $v(x)$ è soluzione del problema

$$\begin{cases} -\Delta v = f^{\#} & \text{in } \Omega^{\#} \\ v = 0 & \text{su } \partial\Omega^{\#}. \end{cases}$$

Si ottiene dunque un confronto puntuale tra il riordinamento della soluzione di un qualunque problema che rientri nella classe considerata e quello della soluzione di un problema «simmetrizzato» che, in un certo senso, è il più semplice (ed il più aderente ai vincoli scelti) tra quelli della suddetta classe.

In realtà si trova di più in quanto vale anche una diseguaglianza tra le energie; precisamente, si ha il seguente risultato.

TEOREMA. – ([199])

$$u^*(s) \leqslant v^*(s), \qquad s \in (0,\ |\Omega|);$$

$$\int_\Omega |\nabla u|^q\, dx \leqslant \int_{\Omega^{\#}} |\nabla v|^q\, dx, \qquad 0 < q \leqslant 2.$$

OSSERVAZIONE. – Il caso dei dati non regolari si può trattare procedendo per approssimazione oppure, come nel lavoro di Talenti, usando il metodo delle troncature per lavorare direttamente sugli insiemi di livello di u. Ovviamente, se u non è regolare, integrali del tipo

$$\int_{u=t} |\nabla u| \, d\sigma$$

non hanno più senso ed il loro ruolo viene svolto da

$$-\frac{d}{dt}\int_{u>t} |\nabla u|^2 \, dx \, .$$

OSSERVAZIONE. – Si osservi esplicitamente che se l'operatore è il Δ, $f = f^{\#}$ ed $\Omega = \Omega^{\#}$, tutte le diseguaglianze nella precedente dimostrazione diventano eguaglianze.

Una possibile applicazione del risultato precedente consiste nell'ottenere la migliore costante C in diseguaglianze del tipo

$$\|u\| \leqslant C\|f\| \, .$$

Ad esempio

$$\sup |u| = u^*(0) \leqslant v^*(0) = \frac{1}{n^2 C_n^{2/n}} \int_0^{|\Omega|} \frac{dr}{r^{2-2/n}} \int_0^r f^*(\varrho) \, d\varrho \, ,$$

che fornisce una stima ottimale in uno spazio di Lorentz, o anche

$$\sup |u| = u^*(0) \leqslant v^*(0) = \int_0^{|\Omega|} \frac{r^{-1+2/n} - |\Omega|^{-1+2/n}}{n(n-2)\, C_n^{2/n}} f^*(r) \, dr \leqslant$$

$$\leqslant C |\Omega|^{2/n - 1/p} \|f\|_p, \qquad p > n/2 \, ,$$

dove

$$C = \frac{1}{n(n-2)\, C_n^{2/n}} \left(\frac{n(p-1)}{2p-n} \right)^{1/p'} .$$

Una vasta gamma di maggiorazioni fini è contenuta nel citato lavoro di Talenti.

8. – Equazione completa.

Il risultato di Talenti (e la tecnica da lui messa a punto) hanno aperto un vastissimo filone di ricerche che va dallo studio di equazioni ellittiche più generali (equazioni lineari [3], [6], [17], [20], [21], [95], [127], [128], [137], [151], [215], [220], [221], equazioni non lineari [2], [16], [18], [20], [47], [54], [55], [57],

[61], [73], [86], [105], [106], [108], [115], [117], [138], [140], [167], [175], [177], [200], [214], equazioni degeneri [23], [25], [52], [113], [116], ecc.) al caso parabolico [18], [21], [44], [45], [60], [88], [96], [148], [213], [219], [222], dal problema di Neumann [98], [139], [143], [155] alle disequazioni variazionali [17], [22], [48], [174], [182], da classi di equazioni tipo Hamilton-Jacobi [12], [107], [112], [114], [145] a Monge-Ampère [201], [217], [218], da funzionali del calcolo delle variazioni [78], [80], [144], [207] a problemi di ottimizzazione in classi di funzioni con assegnato riordinamento [19], [70], [71], [79], [104].

Prendiamo qui in esame alcuni casi modello particolarmente espressivi del tipo di fenomeni cui si va incontro.

Consideriamo il problema

$$\begin{cases} -(a_{ij}u_{x_i})_{x_j} + (b_i u)_{x_i} + d_i u_{x_i} + cu = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

nelle ipotesi:

i) Ω aperto limitato di misura fissata;

ii) a_{ij} limitati, misurabili e tali che

$$a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant |\xi|^2, \qquad \text{per q.o. } x \in \Omega, \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n;$$

iii) $b_i, d_i, c \in L^\infty(\Omega)$;

iv) $f \in L^{2n/(n+2)}(\Omega)$ con riordinamento fissato.

Consideriamo ancora le due seguenti condizioni in alternativa:

v) $\sum_i |b_i(x) + d_i(x)|^2 \leqslant R^2, \ \sum_i (b_i)_{x_i} + c \geqslant 0$;

v)′ $\sum_i |b_i(x)|^2 \leqslant B^2, \ \sum_i |d_i(x)|^2 \leqslant D^2, \ c \geqslant 0$.

Ovviamente il tipo di confronto che si trova dipende dai vincoli imposti e conduce sempre al problema «simmetrizzato» (in un certo senso) più semplice od anche più aderente ai vincoli.

Così tra i problemi che soddisfano *i*)-*v*) vi è

$$\begin{cases} -\Delta v + \dfrac{R}{|x|} x_i v_{x_i} = f^{\#} & \text{in } \Omega^{\#} \\ v = 0 & \text{su } \partial\Omega^{\#}, \end{cases}$$

la cui soluzione è data da

$$v(x) = \int_{|x|}^{[C_n^{-1}|\Omega|]^{1/n}} \frac{dr}{r^{n-1}} \int_0^r e^{R(r-\varrho)} f^*(C_n \varrho^n)\, \varrho^{n-1} d\varrho\,,$$

e tra i problemi che soddisfano *i)*-*iv)*, *v)'* vi è

$$\begin{cases} -\Delta w - B\left(\dfrac{x_i}{|x|}w\right)_{x_i} + \dfrac{D}{|x|}x_i w_{x_i} = f^{\#} & \text{in } \Omega^{\#} \\ w = 0 & \text{su } \partial\Omega^{\#}, \end{cases}$$

per il quale è necessario supporre che la soluzione $w \in H_0^1(\Omega^{\#})$ esista.

Si ha il seguente risultato.

Teorema. – ([20], [24], [203]) *Sotto le ipotesi i)-v) si ha*

$$u^*(s) \leqslant v^*(s), \qquad s \in (0, |\Omega|),$$

e sotto le ipotesi i)-iv), v)' riesce

$$u^*(s) \leqslant w^*(s), \qquad s \in (0, |\Omega|).$$

Osservazione. – Anche nel caso dei problemi testé presi in esame è possibile ottenere in alcuni casi stime dell'energia.

9. – Influenza del termine di ordine zero.

Nei risultati richiamati fino ad ora si è sempre trascurata l'influenza del termine di ordine zero (cu) del quale, sostanzialmente, ci si libera tramite l'ipotesi di segno. Vogliamo indicare come si possono trovare risultati di confronto con problemi che abbiano «memoria» del termine cu.

Per semplicità poniamo $b_i = d_i = 0$ e consideriamo il problema

$$\begin{cases} -(a_{ij}u_{x_j})_{x_i} + cu = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

nelle ipotesi *i)*, *ii)*, *iv)* ed assumendo inoltre che

$$c \geqslant 0, \qquad \text{con assegnato riordinamento}.$$

Tra i problemi che soddisfano i vincoli posti vi è

$$\begin{cases} -\Delta z + c_{\#} z = f^{\#} & \text{in } \Omega^{\#} \\ z = 0 & \text{su } \partial\Omega^{\#}, \end{cases}$$

dove $c_{\#}(x) = c^*(|\Omega| - C_n |x|^n)$ è il riordinamento sferico crescente di c.

TEOREMA. – ([20], [75], [135])

$$\int_0^s u^*(r)\,dr \leqslant \int_0^s z^*(r)\,dr\,, \qquad s \in (0,\ |\Omega|)\,.$$

DIM. – Per semplicità sia $c = 1$. Ricordiamo che nella dimostrazione del risultato di Talenti si trova, con $c = 0$,

$$(-u^*(s))' \leqslant \frac{1}{n^2 C_n^{2/n} s^{2-2/n}} \int_0^s f^*(r)\,dr$$

che, sostituendo f con $f - u$, diventa

$$(-u^*(s))' \leqslant \frac{1}{n^2 C_n^{2/n} s^{2-2/n}} \left(\int_0^s f^*(r)\,dr - \int_0^s u^*(r)\,dr \right).$$

Posto

$$U(s) = \int_0^s u^*(r)\,dr\,,$$

si ha

$$\begin{cases} -U''(s) + \dfrac{U(s)}{n^2 C_n^{2/n} s^{2-2/n}} \leqslant \dfrac{1}{n^2 C_n^{2/n} s^{2-2/n}} \displaystyle\int_0^s f^*(r)\,dr \\ U(0) = U'(|\Omega|) = 0\,. \end{cases}$$

Posto ancora

$$Z(s) = \int_0^s z^*(r)\,dr\,,$$

si ha

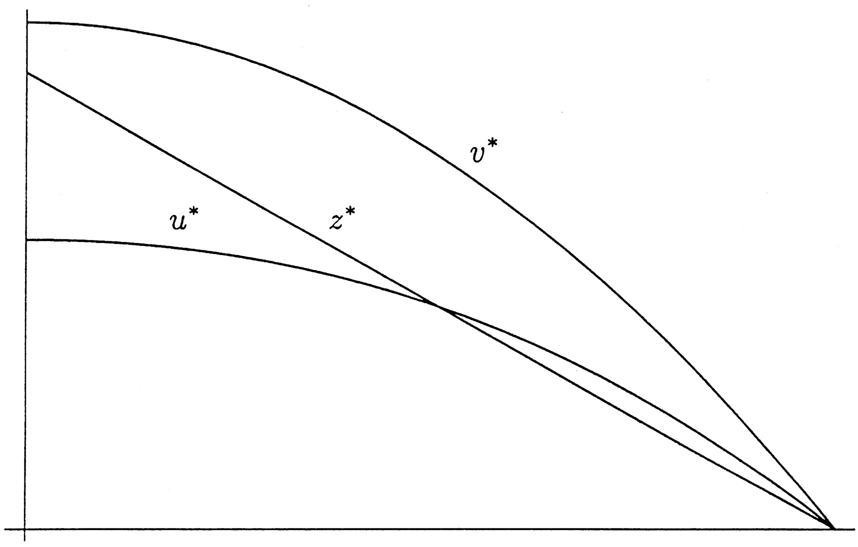
$$\begin{cases} -Z''(s) + \dfrac{Z(s)}{n^2 C_n^{2/n} s^{2-2/n}} = \dfrac{1}{n^2 C_n^{2/n} s^{2-2/n}} \displaystyle\int_0^s f^*(r)\,dr \\ Z(0) = Z'(|\Omega|) = 0 \end{cases}$$

e dal principio di massimo segue il teorema.

OSSERVAZIONE. – Noti controesempi assicurano che non vale la stima puntuale (cfr., ad esempio, [75]); d'altro canto, per una proprietà dei riordinamenti richiamata in precedenza, si ha comunque

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \|z\|_{L^p(\Omega)} \qquad 1 \leqslant p \leqslant \infty \; .$$

OSSERVAZIONE. – Se si tiene conto dell'influenza del termine di ordine zero, si ottiene una stima che è in un certo senso più aderente di quella ottenuta nel paragrafo 7. Infatti, in generale, indicando con v la funzione introdotta nel paragrafo 7, u^*, v^*, z^* hanno un andamento come in figura.



OSSERVAZIONE. – È possibile tenere conto contemporaneamente sia dei termini del primo ordine che di quello di ordine zero (cfr., ad esempio, [17], [20], [215]). In tal caso si ottengono stime del tipo

$$\int_0^s e^{-Kr^{1/n}} u^*(r)\, dr \leqslant \int_0^s e^{-Kr^{1/n}} z^*(r)\, dr$$

dove K è una costante positiva. Tali stime danno, ad esempio, la maggiorazione

$$\|u\|_\infty \leqslant \|z\|_\infty \, .$$

Controesempi mostrano che non è possibile avere $K = 0$ [20].

OSSERVAZIONE. – È possibile trattare il caso in cui $c(x)$ ha segno variabile (cfr., ad esempio, [17], [20], [135]).

10. – Equazioni paraboliche.

Il risultato relativo agli operatori ellittici in cui non si trascura l'influenza del termine di ordine zero, richiamato nel paragrafo precedente, può essere usato per trattare il caso parabolico, discretizzando nel tempo.

Ad esempio, se prendiamo in esame i problemi

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(x, t) & \text{in } \Omega \times [0, T] \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \times [0, T] \\ u(x, 0) = u_0(x), & \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_t - \Delta v = f^{\#}(x, t) & \text{in } \Omega^{\#} \times [0, T] \\ v = 0 & \text{su } \partial\Omega^{\#} \times [0, T] \\ v(x, 0) = u_0^{\#}(x) & \end{cases}$$

si può provare il seguente risultato.

TEOREMA. – ([20], [21], [45], [148])

$$\int_0^s u^*(r, t)\, dr \leqslant \int_0^s v^*(r, t)\, dr, \qquad s \in (0, |\Omega|).$$

Ciò si ottiene per discretizzazione nel tempo, cioè applicando il risultato del caso ellittico a problemi del tipo

$$\begin{cases} -\Delta u^i + \dfrac{u^i}{t_{i+1} - t_i} = f^i + \dfrac{u^{i-1}}{t_{i+1} - t_i} \\ u^i \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

con

$$u^0 = u_0, \qquad 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = T$$

ed operando poi un passaggio al limite.

Il caso parabolico si può anche trattare, in analogia al caso ellittico, integrando sui livelli (cfr., ad esempio, [45], [148]). Questo metodo conduce allo studio di formule di derivazione rispetto alla variabile t di integrali del tipo

$$\int_{u(x,t) > u^*(s,t)} u(x, t)\, dx$$

dove $u^*(s, t)$ è il riordinamento di $u(x, t)$ con t fissato; in altri termini $u^*(s, t)$ è la simmetrizzata di Steiner di $u(x, t)$ rispetto alla retta $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$;

vale la pena di osservare esplicitamente che, quando t varia, la misura dell'insieme di integrazione $\{u(x, t) > u^*(s, t)\}$ vale costantemente s.

Tale difficoltà si può inquadrare anche in quella più generale di studiare l'influenza della simmetrizzazione di Steiner sui problemi ellittici (cfr. anche [66]).

11. – Formula di derivazione.

Diamo un cenno di come si possa dare una formula che consenta di effettuare la derivata di integrali del tipo di quelli appena visti.

Sia u una funzione di classe $C^\infty(G)$, dove $G = \Omega \times [0, T] \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ed Ω è un aperto limitato regolare di $\mathbb{R}^n$.

Fissato $t \in [0, T]$, definiamo

$\Gamma_t^\theta = \{(x, t) : x \in \Omega, u(x, t) = \theta\}$ (livello non critico),

$G_t^\theta = \{(x, t) : x \in \Omega, u(x, t) > \theta\}$.

Si introduce su Γ_t^θ un campo di vettori

$$\mathcal{A} = (A_i(x, t), 1), \qquad i = 1, \ldots, n$$

dove

$$A_i(x, t) = A(x, t) \frac{u_{x_i}}{|\nabla_x u|}$$

e $A(x, t)$ è tale che

- $\displaystyle\int_{\Gamma_t^\theta} A(x, t)\, d_x\sigma = 0;$

- $\displaystyle\sum_{i=1}^n A_i(x, t)\, u_{x_i} + u_t = \text{costante su } \Gamma_t^\theta.$

Il campo $\mathcal{A}$ fa in modo che la linea di livello Γ_t^θ si «evolva» conservando la proprietà di essere il bordo di un insieme di livello la cui misura non dipende da t.

Per ogni $g \in C^\infty(G)$ si ha la formula di derivazione (cfr. [10], [11], [100], [101])

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{G_t^\theta} g(x, t)\, dx = \int_{G_t^\theta} g_t(x, t)\, dx - \int_{\Gamma_t^\theta} A g\, d_x\sigma .$$

OSSERVAZIONE. – Tale formula si può considerare come una generalizzazione della classica formula di coarea.

OSSERVAZIONE.. – Se $g = u$ si ha

$$\int_{\Gamma_t^\theta} Au\, d_x \sigma = u \int_{\Gamma_t^\theta} A\, d_x \sigma = 0$$

e dunque (cfr. [45], [148])

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{G_t^\theta} u(x, t)\, dx = \int_{G_t^\theta} u_t(x, t)\, dx\,.$$

Tale formula ha varie applicazioni. Ad esempio, si può dare un risultato di confronto per un'equazione non variazionale del tipo (cfr. [11])

$$\begin{cases} -(a_{ij} u_{x_j})_{x_i} - \alpha(t)\, u_{tt} = f(x, t) & \text{in } G \\ u = 0 & \text{su } \partial G \end{cases}$$

ottenendo ancora la stima

$$\int_0^s u^*(r, t)\, dr \leq \int_0^s v^*(r, t)\, dr\,,$$

dove v è la soluzione del problema

$$\begin{cases} -\Delta_x v - \alpha(t)\, v_{tt} = f^{\#}(x, t) & \text{in } \mathrm{G}^{\#} \\ v = 0 & \text{su } \partial \mathrm{G}^{\#}. \end{cases}$$

12. – Equazioni non lineari di tipo ellittico: qualche esempio.

Segnaliamo alcune classi di equazioni ellittiche non lineari che sono state trattate con i metodi di simmetrizzazione ottenendo, tra l'altro, come conseguenza, risultati di regolarità, anche in casi limite, e di esistenza.

Ad esempio, sono stati studiati in [200] problemi del tipo

$$\begin{cases} -(a_i(u, \nabla u))_{x_i} = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

sotto la condizione

$$a_i(\eta, \xi)\, \xi_i \geq A(|\xi|)$$

con $A(r)$ funzione convessa in $[0, +\infty[$ e tale che $A(r)/r \to 0$ per $r \to 0$.

In tale classe rientrano, ad esempio, il p-laplaciano e l'equazione di superfici con curvatura media assegnata.

Un'altra classe di problemi trattati è quella dei problemi con crescita naturale nel gradiente (cfr. [20], [73], [102], [105], [106], [117], [138], [177], [182])

$$\begin{cases} -\Delta_p u = |\nabla u|^p + f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \,. \end{cases}$$

Segnaliamo infine una classe di operatori non lineari degeneri studiata recentemente da vari autori facendo uso di tecniche di simmetrizzazione (cfr. [9], [14], [214])

$$\begin{cases} -(a_i(u, \nabla u))_{x_i} = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

sotto le condizioni

$$a_i(\eta, \xi)\, \xi_i \geqslant b(|\eta|)\, |\xi|^p, \qquad 1 < p < \infty$$

dove $b : [0, +\infty[\to]0, +\infty[$ è una funzione continua e limitata.

Limitandosi, per semplicità, al caso $p = 2$, si ottiene, per esempio

$$-\frac{d}{ds} B(u^*(s)) \leqslant \frac{1}{n^2 C_n^{2/n} s^{2-2/n}} \int_0^s f^*(r)\, dr$$

dove

$$B(t) = \int_0^t b(s)\, ds \,.$$

Si ricava

$$(\circ) \qquad B(u^*(0)) \leqslant \frac{1}{n^2 C_n^{2/n}} \int_0^{|\Omega|} \frac{ds}{s^{2-2/n}} \int_0^s f^*(r)\, dr \,.$$

La diseguaglianza precedente fornisce sempre una stima per u solo se

$$\lim_{t \to +\infty} B(t) = +\infty \,.$$

Se invece

$$\lim_{t \to +\infty} B(t) = \beta < \infty \,,$$

allora la $(\circ)$ fornisce una stima per u solo se f è «abbastanza piccola».

Come nel caso non degenere, si ottengono stime anche per ∇u.

Appendice.

Diamo qui una semplice dimostrazione che consente di pervenire alla migliore costante nella diseguaglianza di Sobolev.

DIM. – Richiamiamo una classica diseguaglianza per funzioni di una variabile [58]

a) diseguaglianza di Bliss ($1 < p < q$)

$$\int_0^\infty \left(\int_r^\infty \varphi(s)\, ds \right)^q dr \leq C \left(\int_0^\infty \frac{\varphi(r)^p}{r^{1-p-p/q}}\, dr \right)^{q/p},$$

dove

$$C = \frac{p}{q-1} \left\{ \frac{\Gamma(pq/(q-p))}{\Gamma(q/(q-p))\,\Gamma(p(q-1)/(q-p))} \right\}^{q/p-1} \left\{ q\left(1 - \frac{1}{p}\right) \right\}^{q-q/p+1}.$$

Sia u una funzione di classe $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ che, per evitare complicazioni tecniche, supponiamo priva di zone piatte; dalla formula di co-area si ricava subito l'eguaglianza

$$b)\quad \frac{d}{ds} \int_{|u| > u^*(s)} |\nabla u|\, dx = (-u^*(s))'\, P\{|u| > u^*(s)\},$$

dove P indica il perimetro nel senso di De Giorgi [85].

Posto

$$|\nabla u| = f$$

ed integrando sull'insieme di livello $\{|u| > u^*(s)\}$, si ricava

$$nC_n^{1/n} s^{1-1/n} (-u^*(s))' \leq F(s)$$

dove

$$F(s) = \frac{d}{ds} \int_{|u| > u^*(s)} f\, dx\,;$$

ne consegue

$$u^*(s) \leq \frac{1}{nC_n^{1/n}} \int_s^{|\Omega|} r^{-1+1/n} F(r)\, dr$$

e dalla diseguaglianza di Bliss

$$\|u\|_{p^*} \leqslant \|u^*\|_{p^*} \leqslant C\|F\|_p \leqslant C\|f\|_p$$

con $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$ e

$$C = \frac{1}{n^{1/p}\sqrt{\pi}} \left(\frac{p-1}{n-p} \right)^{1-1/p} \left\{ \frac{\Gamma(1+n/2)\,\Gamma(n)}{\Gamma(n/p)\,\Gamma(1+n/p')} \right\}^{1/n}.$$

Un punto centrale di tale dimostrazione è la stima

$$\|F\|_p \leqslant \|f\|_p$$

che si ottiene facilmente con un calcolo diretto o facendo ricorso alla nozione di pseudo-riordinamento (cfr. [19], [23], [97]).

Più precisamente si può osservare che F è uno pseudoriordinamento di f e pertanto esiste una successione di funzioni f_k che converge debolmente ad F tale che $f_k^* = f^*$ (cfr. [23]).

La nozione di pseudoriordinamento è equivalente a quella di riordinamento relativo introdotta da Mossino-Temam [149] nello studio di problemi della fisica del plasma ed ha trovato una vasta gamma di applicazioni sulle quali non possiamo intrattenerci (cfr., ad esempio, [149], [178], [179], [180], [181], [182], [183]).

BIBLIOGRAFIA

[1] D. R. ADAMS, *A sharp inequality of J. Moser for higher order derivatives*, Ann. of Math., **128**, 1988.

[2] J. A. AGUILAR - I. PERAL, *An a priori estimate for the N-Laplacian*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math., t. **319**, 1994.

[3] A. ALBERICO - V. FERONE, *Regularity properties of solutions of elliptic equations in $\mathbb{R}^2$ in limit cases*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (9) **6**, 1995.

[4] F. J. ALMGREN JR - E. H. LIEB, *Symmetric decreasing rearrangement is sometimes continous*, J. Amer. Math. Soc., vol. **2**, no. 4, 1989.

[5] F. J. ALMGREN JR - E. H. LIEB, *Symmetric decreasing rearrangement can be discontinuous*, Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.), **20**, no. 2, 1989.

[6] A. ALVINO, *Formule di maggiorazione e regolarizzazione per soluzioni di equazioni ellittiche del secondo ordine in un caso limite*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) **62**, 1977.

[7] A. ALVINO, *Sulla diseguaglianza di Sobolev in spazi di Lorentz*, Boll. U.M.-I. (5), **14**-A, 1977.

[8] A. ALVINO, *Un caso limite della diseguaglianza di Sobolev in spazi di Loren-tz*, Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli, **44**, 1977.

[9] A. ALVINO - L. BOCCARDO - V. FERONE - L. ORSINA - G. TROMBETTI, in preparazione.

[10] A. ALVINO - J. I. DÍAZ - P. L. LIONS - G. TROMBETTI, *Équations elliptiques et symétrisation de Steiner*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math., **314**, 1992.

[11] A. ALVINO - J. I. DÍAZ - P. L. LIONS - G. TROMBETTI, *Elliptic equations and Steiner symmetrization*, Comm. Pure Appl. Math., **49** (3), 1996.

[12] A. ALVINO - V. FERONE - P. L. LIONS - G. TROMBETTI, *Convex symmetrization and applications*, Ann. Inst. H. Poincaré - Analyse Nonlinéaire, **14**, 1997.

[13] A. ALVINO - V. FERONE - G. TROMBETTI, *Moser-type inequalities in Lorentz spaces*, Potential Analysis, **5**, 1996.

[14] A. ALVINO - V. FERONE - G. TROMBETTI, *A priori estimates for a class of non uniformly elliptic equations*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, **46**-suppl., 1998.

[15] A. ALVINO - V. FERONE - G. TROMBETTI, *On the properties of some nonlinear eigenvalues*, SIAM J. Math. Anal., **29**, 1998.

[16] A. ALVINO - V. FERONE - G. TROMBETTI, *Estimates for the gradient of nonlinear elliptic equations with L^1 data*, in corso di stampa su Ann. Mat. Pura Appl..

[17] A. ALVINO - P. L. LIONS - S. MATARASSO - G. TROMBETTI, *Comparison results for solutions to elliptic problems via symmetrization*, Ann. Inst. H. Poincaré - Analyse Nonlinéaire, **16**, 2, 1999.

[18] A. ALVINO - P. L. LIONS - G. TROMBETTI, *Comparaison des solutions d'équations paraboliques et elliptiques par symétrisation. Une méthode nouvelle*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math., **303**, no. 20, 1986.

[19] A. ALVINO - P. L. LIONS - G. TROMBETTI, *On optimization problems with prescribed rearrangements*, Nonlinear Analysis T.M.A, **13**, 1989.

[20] A. ALVINO - P. L. LIONS - G. TROMBETTI, *Comparison results for elliptic and parabolic equations via Schwartz symmetrization*, Ann. Inst. H. Poinca-ré - Analysis Nonlinéaire, **7**, 1990.

[21] A. ALVINO - P. L. LIONS - G. TROMBETTI , *Comparison results for elliptic and parabolic equations via Symmetrization: a new approach*, Diff. Int. Eq., **4**, 1991.

[22] A. ALVINO - S. MATARASSO - G. TROMBETTI, *Variational inequalities and rearrangements*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (9), **3**, 1992.

[23] A. ALVINO - G. TROMBETTI, *Sulle migliori costanti di maggiorazione per una classe di equazioni ellittiche degeneri*, Ricerche di Matematica, **27**, 1978.

[24] A. ALVINO - G. TROMBETTI, *Equazioni ellittiche con termini di ordine inferiore e riordinamenti*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8), **66**, 1979.

[25] A. ALVINO - G. TROMBETTI, *Sulle migliori costanti di maggiorazione per una classe di equazioni ellittiche degeneri e non*, Ricerche di Matematica, **30**, 1981.

[26] A. ALVINO - G. TROMBETTI, *A lower bound for the first eigenvalue of an elliptic operator*, Math. Anal. Appl., **94**, 1983.

[27] A. ALVINO - G. TROMBETTI, *Isoperimetric inequalities connected with torsion problem and capacity*, Boll. U.M.I. (6), 4-B, 1985.

[28] V. ANDRIEVSKIĬ - W. HANSEN - N. NADIRASHVILI, *Isoperimetric inequalities for capacities in the plane*, Math. Ann., **292**, no. 2, 1992.

[29] G. ARONSSON, *An integral inequality and plastic torsion*, Arch. Rational Mech. Anal., **7**, 1989.

[30] M. S. ASHBAUGH - R. D. BENGURIA, *Proof of the Payne-Pólya-Weinberger conjecture*, Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.), **25**, no. 1, 1991.

[31] M. S. Ashbaugh - R. D. Benguria, *A sharp bound for the ratio of the first two eigenvalues of Dirichlet Laplacians and extensions*, Ann. of Math., (2) **135**, no. 3, 1992.
[32] M. S. Ashbaugh - R. D. Benguria, *Isoperimetric bounds for higher eigenvalue ratios for the n-dimensional fixed membrane problem*, Proc. Royal Soc. Edinburgh, **123**-A, no. 6, 1993.
[33] M. S. Ashbaugh - R. D. Benguria, *On Rayleigh's conjecture for the clamped plate and its generalization to three dimensions*, Duke Math. J., **78**, no. 1, 1995.
[34] M. S. Ashbaugh - R. S. Laugesen, *Fundamental tones and buckling loads of clamped planes*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), **23**, no. 2, 1996.
[35] T. Aubin, *Problèmes isopèrimetriques et espaces de Sobolev*, J. Diff. Geometry, **11**, 1976.
[36] T. Aubin, *Meilleures constantes dans le théorème d'inclusion de Sobolev et un théorème de Fredholm non linéaire pour la transformation conforme de la courbure scalaire*, J. Funct. Anal., **32**, 1979.
[37] A. Baernstein II, *A unified approach to symmetrization*, Partial differential equations of elliptic type (A. Alvino, E. Fabes & G. Talenti eds.), *Symposia Math.*, **35**, Cambridge University Press, 1998.
[38] A. Baernstein II - B. A. Taylor, *Spherical rearrangements, subharmonic functions, and *-functions in n-space*, Duke Math. J., **43**, no. 2, 1976.
[39] R. J. Bagby, *Maximal functions and rearrangements: some new proofs*, Ind. Univ. Math. J., vol. **32**, no. 6, 1983.
[40] C. Bandle, *Inégalités isopérimétriques pour des membranes vibrantes*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A-B, **269**, 1969.
[41] C. Bandle, *Extensions of an inequality by Pólya and Schiffer for vibrating membranes*, Pacific J. Math., **42**, 1972.
[42] C. Bandle, *Isoperimetric inequality for some eigenvalues of an inhomogeneous, free membrane*, SIAM J. Appl. Math., **22**, 1972.
[43] C. Bandle, *A geometrical isoperimetric inequality and applications to problems of mathematical physics*, Comment. Math. Helv., **49**, 1974.
[44] C. Bandle, *Isoperimetric inequalities for a class of nonlinear parabolic equations*, Z.A.M.P., **27**, no. 3, 1976.
[45] C. Bandle, *On symmetrizations in parabolic equations*, J. Analyse Math., **30**, 1976.
[46] C. Bandle, *Isoperimetric inequalities and applications*, Monographs and Studies in Mathematics, 7. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, Mass.-London, 1980.
[47] C. Bandle - E. Giarrusso, *Boundary blow up for semilinear elliptic equations with nonlinear gradient terms*, Adv. Differential Equations, **1**, no. 1, 1996.
[48] C. Bandle - J. Mossino, *Rearrangement in variational inequalities*, Ann. Mat. Pura Appl. (4), **138**, 1984.
[49] C. Bandle - L. A. Peletier, *Best Sobolev constants and Emden equations for the critical exponent in S^3*, Math. Ann., **313**, no. 1, 1999.
[50] W. Beckner, *Geometric inequalities in Fourier analysis*, Essays on Fourier Analysis in honor of Elias M. Stein (Princeton NJ 1991), *Princeton Math. Ser.* 42, Princeton University Press, Princeton, N. J. 1995.
[51] P. P. Bérard - D. Meyer, *Inégalités isopérimétriques et applications*, Ann. Sci. École Norm. Sup., 4e série, t. 15, 1982.
[52] M. F. Betta, *Estimates for solutions of nonlinear degenerate elliptic equations*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, **45**, 1997.

[53] M. F. BETTA - F. BROCK - A. MERCALDO - M. R. POSTERARO, *A weighted isoperimetric inequality and applications to symmetrization*, in corso di stampa su *J. Ineq. Appl.*.

[54] M. F. BETTA - V. FERONE - A. MERCALDO, *Regularity for solutions of nonlinear elliptic equations*, Bull. Sci. Math., **118**, 1994.

[55] M. F. BETTA - A. MERCALDO, *Comparison and regularity results for a nonlinear elliptic equation*, Nonlinear Analalysis T.M.A., **20**, 1993.

[56] M. F. BETTA - A. MERCALDO, *Geometric inequalities related to Steiner symmetrization*, Diff. Int. Eq., **10**, no. 3, 1997.

[57] T. BHATTACHARYA - A. WEITSMAN, *Some estimates for the symmetrized first eigenfunction of the Laplacian*, Potential Analysis, **9**, 1998.

[58] G. A. BLISS, *An integral inequality*, J. London Math. Soc., **5**, 1930.

[59] L. BOUKRIM, *Inégalités isopérimétriques pour un probléme d'électrosta-tique*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math., **318**, no. 5, 1994.

[60] M. BRAMANTI, *Symmetrization in parabolic Neumann problems*, *Appl. Anal.*, vol. **40**, no. 1, 1991.

[61] B. BRANDOLINI - V. M. MONETTI - L. RANDAZZO, *A comparison result for a class of semilinear elliptic equations*, Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli (4), **64**, 1997.

[62] H. J. BRASCAMP - E. H. LIEB - J. M. LUTTINGER, *A general rearrangement inequality for multiple integrals*, J. Funct. Anal., **17**, 1974.

[63] Y. BRENIER, *Polar factorization and monotone rearrangement of vector- valued functions*, Comm. Pure Appl. Math., **54**, 1991.

[64] H. BREZIS, *Laser beams and limiting case of Sobolev inequalities*, Non-linear PDE's and their applications, Collège de France Seminar, vol. II (H. Brezis and J. L. Lions eds.), *Res. Notes Math.*, no. 60, Pitman, London, 1982.

[65] H. BREZIS - S. WAINGER, *A note on limiting cases of Sobolev embeddings and convolution inequalities*, Communications in P.D.E., **5**, 1980.

[66] F. BROCK, *Continuous Steiner-symmetrization*, Math. Nachr., 172, 1995.

[67] J. BROTHERS - W. P. ZIEMER, *Minimal rearrangements of Sobolev functions*, J. Reine Angew. Math., **384**, 1988.

[68] P. BUONOCORE, *Isoperimetric inequalities in the torsion problem for multiply connected domains*, Z.A.M.P., **36**, no. 1, 1985.

[69] P. BUONOCORE, *Some isoperimetric inequalities in a special case of the problem of torsional creep*, Appl. Anal., vol. **27**, no. 1-3, 1988.

[70] G. R. BURTON, *Rearrangements of functions, maximization of convex functionals, and vortex rings*, Math. Ann., **276**, no. 2, 1987.

[71] G. R. BURTON - J. B. MCLEOD, *Maximization and minimization on classes of rearrangements*, Proc. Royal Soc. Edinburgh, **119**-A, no. 3-4, 1991.

[72] S. S. CHENG, *Isoperimetric eigenvalue problem of even order differential equations*, Pacific J. Math., **99**, no. 2, 1982.

[73] F. CHIACCHIO, *An existence result for a nonlinear problem in a limit case*, Le Matematiche (Catania), **53**, 1998.

[74] G. CHITI, *Rearrangements of functions and convergence in Orlicz spaces*, Appl. Anal., **9**, 1979.

[75] G. CHITI, *Norme di Orlicz delle soluzioni di una classe di equazioni ellittiche*, Boll. U.M.I. (5), **16**-A, 1979.

[76] CHITI G., *A reverse Hölder inequality for the eigenfunctions of linear second order elliptic equations*, Z.A.M.P., **33**, 1982.

[77] K. M. CHONG - N. M. RICE, *Equimeasurable rearrangements of functions*, Queen's papers in pure and applied mathematics, n. 28, Queen's University, Ontario, 1971.

[78] A. CIANCHI, *Local minimizers and rearrangements*, Appl. Math. Optim., **27**, no. 3, 1993.

[79] A. CIANCHI, *On the L^q norm of functions having equidistributed gradients*, Nonlinear Anal., **26**, no. 12, 1996.

[80] A. CIANCHI - R. SCHIANCHI, *A priori sharp estimates for minimizers*, Boll. U.M.I. (7), **7**-B, no. 4, 1993.

[81] J. M. CORON, *The continuity of rearrangement in $W^{1,p}(\mathbb{R})$*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), **11**, 1984.

[82] M. G. CRANDALL - L. TARTAR, *Some relations between nonexpansive and order preserving mappings*, Proc. Amer. Math. Soc., **78**, 1980.

[83] P. S. CROOKE - R. P. SPERB, *Isoperimetric inequalities in a class of nonlinear eigenvalue problems*, SIAM J. Math. Anal., **9**, 1978.

[84] J. A. CROWE - J. A. ZWEIBEL, *Rearrangements of functions*, J. Funct. Anal., **66**, 1986.

[85] E. DE GIORGI, *Su una teoria generale della misura $(r-1)$-dimensionale in uno spazio ad r dimensioni*, Ann. Mat. Pura Appl. (4), **36**, 1954.

[86] T. DEL VECCHIO, *Nonlinear elliptic equations with measure data,* Potential Analysis, **4**, no. 2, 1995.

[87] J. I. DÍAZ, *Applications of symmetric rearrangement to certain nonlinear elliptic equations with a free boundary*, Nonlinear differential equations (Granada, 1984), *Res. Notes in Math.*, 132, Pitman, Boston, Mass.-London, 1985.

[88] J. I. DÍAZ - J. MOSSINO, *Isoperimetric inequalities in the parabolic obstacle problems*, J. Math. Pures Appl. (9), **71**, no. 3, 1992.

[89] R. J. DOUGLAS, *Rearrangements of functions on unbounded domains*, Proc. Royal Soc. Edinburgh, **124**-A, 1994.

[90] G. F. DUFF, *Integral inequalities for equimeasurable rearrangements*, Can-ad. J. Math., **22**, 1970.

[91] H. EGNELL - F. PACELLA - M. TRICARICO, *Some remarks on Sobolev inequalities*, Nonlinear Anal., **13**, no. 6, 1989.

[92] A. EHRHARD, *Inégalités isopérimetriques et intégrales de Dirichlet gaussiennes*, Ann. Sci. École Norm. Sup., **17**, 1984.

[93] J. B. EPPERSON, *A class of monotone decreasing rearrangements*, J. Math. Anal. Appl., **150**, 1990.

[94] G. FABER, *Beweis dass unter allen homogenen membranen von gleicher fläche und gleicher spannung die kreisförmige den tiefsten grundton gibt*, Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss., Math.-Naturwiss. Kl., 1923.

[95] A. FERONE - V. FERONE - R. VOLPICELLI, *Moser-type inequalities for solutions of linear elliptic equations with lower order terms*, Diff. Int. Eq., **10**, 1997.

[96] A. FERONE - R. VOLPICELLI, *Symmetrization in parabolic obstacle problems*, Bull. Sci. Math., **120**, 1996.

[97] A. FERONE - R. VOLPICELLI, *Some relations between pseudo-rearrange-ment and relative rearrangement*, in corso di stampa su *Nonlinear Analysis T.M.A.*.

[98] V. FERONE, *Symmetrization in a Neumann problem*, Le Matematiche (Catania), **41**, 1986.

[99] V. FERONE, *Symmetrization results in electrostatic problems*, Ricerche di Matematica, **37**, 1988.

[100] V. FERONE - A. MERCALDO, *A second order derivation formula for functions defined by integrals*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math., **326**, 1998.
[101] V. FERONE - A. MERCALDO, in preparazione.
[102] V. FERONE - F. MURAT, *Quasilinear problems having quadratic growth in the gradient: an existence result when the source term is small*, Équations aux dérivées partielles et applications, Gauthier - Villars, Éd. Sci. M 'ed. Elsevier, Paris, 1998.
[103] V. FERONE - F. MURAT, *Nonlinear problems having natural growth in the gradient: an existence result when the source terms are small*, in corso di stampa su *Nonlinear Analysis T.M.A.*
[104] V. FERONE - M. R. POSTERARO, *Maximization on classes of functions with fixed rearrangemet*, Diff. Int. Eq., **4**, no. 4, 1989.
[105] V. FERONE - M. R. POSTERARO, *On a class of quasilinear elliptic equations with quadratic growth in the gradient*, Nonlinear Analysis T.M.A., **20**, 1993.
[106] V. FERONE - M. R. POSTERARO - J.-M. RAKOTOSON, *L^∞-estimates for nonlinear elliptic problems with p-growth in the gradient*, J. Ineq. Appl., vol. **3**, 1999.
[107] V. FERONE - M. R. POSTERARO - R. VOLPICELLI, *An inequality concerning rearrangements of functions and Hamilton-Jacobi equations*, Arch. Rational Mech. Anal., **125**, 1993.
[108] D. G. DE FIGUEIREDO - P. L. LIONS, *On pairs of positive solutions for a class of semilinear elliptic problems*, Ind. Univ. Math. J., vol. **34**, 1985.
[109] W. H. FLEMING - R. RISHEL, *An integral formula for total gradient variation*, Arch. Math., **11**, 1960.
[110] A. FRIEDMAN - J. B. MCLEOD, *Strict inequalities for integrals of decreasingly rearranged functions*, Proc. Royal Soc. Edinburgh, **102**-A, no. 3-4, 1986.
[111] A. M. GARSIA - E. RODEMICH, *Monotonicity of certain functionals under rearrangements*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **24**, 1974.
[112] E. GIARRUSSO, *Estimates for generalized subsolutions of first order Hamil-ton-Jacobi equations and rearrangements*, Nonlinear Analysis T.M.A., **18**, 1992.
[113] E. GIARRUSSO - D. NUNZIANTE, *Su un problema di autovalori per una classe di equazioni ellittiche degeneri*, Le Matematiche (Catania), **36**, 1981.
[114] E. GIARRUSSO - D. NUNZIANTE D., *Symmetrization in a class of first-order Hamilton-Jacobi equations*, Nonlinear Analysis T.M.A., 8, 1984.
[115] E. GIARRUSSO - D. NUNZIANTE, *Regularity theorems in limit cases for solutions of linear and nonlinear elliptic equations*, Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste, **20**, 1988.
[116] E. GIARRUSSO - G. TROMBETTI, *Estimates for solutions of elliptic equations in a limit case*, Bull. Austral. Math. Soc., vol. **36**, 1987.
[117] N. GRENON-ISSELKOU - J. MOSSINO, *Existence de solutions bornées pour certaines équations elliptiques quasilinéaires*, C. R. Acad. Sci. Paris, **321**, 1995.
[118] W. HANSEN - N. NADIRASHVILI, *Isoperimetric inequalities for capacities*, Harmonic analysis and discrete potential theory (Frascati, 1991), Plenum, New York, 1992.
[119] G. H. HARDY - J. E. LITTELWOOD - G. PÓLYA G., *Inequalities*, Cambridge University Press, 1964.
[120] W. K. HAYMAN, *Some bounds for principal frequency*, Appl. Anal., vol. **7**, 1978.
[121] J. HERSCH, *Une interpretation du principe de Thomson et son analogue pour la fréquence fondamentale d'une membrane. Application.*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. **248**, 1959.

[122] J. HERSCH, *Isoperimetric monotonicity: some properties and conjectures (connections between isoperimetric inequalities)*, SIAM Rev., **30**, no. 4, 1988.
[123] K. HILDÉN, *Symmetrization of functions in Sobolev spaces and the isoperimetric inequality*, Manuscripta Math., **18**, 1976.
[124] B. KAWOHL, *Rearrangements and convexity of level sets in PDE*, Lecture Notes in Mathematics, 1150. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1985.
[125] KAWOHL B., *On a family of torsional creep problems*, J. Reine Angew. Math., **410**, 1990.
[126] J. B. KELLER, *The shape of the strongest column*, Arch. Rational Mech. Anal., **5**, 1960.
[127] S. KESAVAN, *Some remarks on a result of Talenti*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), **15**, no. 3, 1988.
[128] S. KESAVAN, *On a comparison theorem via symmetrization*, Proc. Royal Soc. Edinburgh, **119**-A, no. 1-2, 1991.
[129] M. T. KOHLER-JOBIN, *Démonstration de l'inégalité isopérimétrique $P\lambda^2 \geqslant \pi j_0^4/2$, conjecturée par Polya et Szegö*, C. R. Acad. Sc. Paris, t. **281**, 1975.
[130] M. T. KOHLER-JOBIN, *Sur la première fonction propre d'une membrane: une extension à N dimensions de l'inégalité isopérimétrique de Payne-Rayner*, *J. Math. Phys. Appl.*, **28**, 1977.
[131] M. T. KOHLER-JOBIN, *Une méthode de comparaison isopérimétrique de fonctionelles de domaines de la physique mathématique I. Première part: une démonstration de la conjecture isopérimétrique $P\lambda^2 \geqslant \pi j_0^4/2$ de Polya et Szegö*, J. Math. Phys. Appl., **29**, 1978.
[132] E. KRAHN, *Über eine von Rayleigh formulierte minimaleigenschaft des kreises*, Math. Ann., **94**, 1924.
[133] E. B. LIEB, *Existence and uniqueness of the minimizing solution of Choqua-rd's nonlinear equation*, Studies in Appl. Math., **57**, no. 2, 1977.
[134] E. H. LIEB, *Sharp constants in the Hardy-Littelwood-Sobolev and related inequalities*, Ann. of Math., **118**, 1983.
[135] P. L. LIONS, *Quelques remarques sur la symétrisation de Schwarz*, *Nonlinear partial differential equations and their applications*, Collège de France Seminars, vol. **1**, Pitman 1981.
[136] P.-L. LIONS - F. PACELLA - M. TRICARICO, *Best constants in Sobolev inequalities for functions vanishing on some part of the boundary and related questions*, *Ind. Univ. Math. J.*, vol. **37**, no. 2, 1988.
[137] V. A. LISKEVICH, *Some limit cases in estimates for solutions of second order elliptic equations*, Houston J. Math., vol. **19**, no. 4, 1993.
[138] C. MADERNA - C. D. PAGANI - S. SALSA, *Quasilinear elliptic equations with quadratic growth in the gradient*, J. Differential Equations, **97**, 1992.
[139] C. MADERNA - S. SALSA, *Symmetrization in Neumann problems*, Appl. Anal., vol. **9**, 1979.
[140] C. MADERNA - S. SALSA, *Dirichlet problem for elliptic equations with nonlinear first order terms: a comparison result*, Ann. Mat. Pura Appl., **148**, 1987.
[141] E. MAKAI, *Bounds for the principal frequency of a membrane and the torsional rigidity of a beam*, Acta Sci. Math. (Szeged), **20**, 1959.
[142] E. MAKAI, *A proof of Saint-Venant's theorem on torsional rigidity*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar., **17**, 1966.
[143] V. G. MAZ'JA, *On weak solutions of the Dirichlet and Neumann problems*, Trudy Moskov. Mat. Obshch, **20**, 1969; trad. ingl.: *Trans. Moscow Math. Soc.*, **20**, 1969.

[144] A. MERCALDO, *Boundedness of minimizers of degenerate functionals*, Diff. Int. Eq., **9**, 1996.
[145] A. MERCALDO, *A remark on comparison results for first-order Hamilton-Jacobi equations*, Nonlinear Analysis T.M.A., **9**, 1997.
[146] J. MOSER, *A sharp form of an inequality by N. Trudinger*, Ind. Univ. Math. J., vol. **20**, 1971.
[147] J. MOSSINO, *Inégalitée isopérimétriques et applications en physique*, Travaux en Cours. Hermann, Paris, 1984.
[148] J. MOSSINO - J.-M. RAKOTOSON, *Isoperimetric inequalities in parabolic equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., (4) **13**, no. 1, 1986.
[149] J. MOSSINO - R. TEMAM, *Directional derivative of the increasing rearrangement mapping and application to a queer differential equation in plasma physics*, Duke Math. J., **48**, no. 3, 1981.
[150] F. MUGELLI - G. TALENTI, *Sobolev inequalities in 2-D hyperbolic space: a borderline case*, J. Ineq. Appl., vol. **2**, no. 3, 1998.
[151] D. MUGNAI - G. TALENTI, *Estimating the resolvent of elliptic second-order partial differential operators*, Le Matematiche (Catania), **51** (1996), no. 2, 1997.
[152] N. NADIRASHVILI, *Rayleigh's conjecture on the principal frequency of the clamped plate*, Arch. Rational Mech. Anal., **129**, no. 1, 1995.
[153] E. T. OKLANDER, *Interpolación, espacios de Lorentz y teorema de Marchin-kiewicz*, Cursos y Seminarios de Matemática, Fasc. 20 Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires, 1965.
[154] R. OSSERMAN, *The isoperimetric inequality*, Bull. Amer. Math. Soc., **84**, no. 6, 1978.
[155] F. PACELLA - M. TRICARICO, *Symmetrization for a class of elliptic equations with mixed boundary conditions*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, **34**, no. 1, 1985/86.
[156] L. E. PAYNE, *Inequalities for eigenvalues of a membranes and lates*, J. Rational Mech. Anal., **4**, 1955.
[157] L. E. PAYNE, *News isoperimetric inequalities for eigenvalues and other physical quantities*, Comm. Pure Appl. Math., **9**, 1956.
[158] L. E. PAYNE, *Inequalities for eigenvalues of supported and free plates*, Quart. Appl. Math., **16**, 1958.
[159] L. E. PAYNE, *Isoperimetric inequalities for eigenvalues and their applications*, Autovalori e autosoluzioni, Centro Internazionale Matematico Estivo 2^0 ciclo, Chieti, 1962.
[160] L. E. PAYNE, *Some isoperimetric inequalities in the torsion problem for multiply connected regions*, Studies in Mathematical Analysis and Related Topics: Essays in honor of Pólya G., Stanford, California, 1962.
[161] L. E. PAYNE, *Isoperimetric inequalities and their applications*, SIAM Rev., **9**, 1967.
[162] L. E. PAYNE - G. PÓLYA - H. F. WEINBERGER, *On the ratio of consecutive eigenvalues*, J. Math. and Phys., **35**, 1956.
[163] L. E. PAYNE - M. E. RAYNER, *An isoperimetric inequality for the first eigenfunction in the fixed membrane problem*, Z.A.M.P., **23**, 1972.
[164] L. E. PAYNE - M. E. RAYNER, *Some isoperimetric norm bounbs for solutions of the Helmholtz equation*, Z.A.M.P., **24**, 1973.
[165] L. E. PAYNE - H. F. WEINBERGER, *Some isoperimetric inequalities for membrane frequencies and torsional rigidity*, J. Math. Anal. Appl., **2**, 1961.

[166] L. E. PAYNE - A. WEISTEIN, *Capacity, virtual mass and generalized symmetrization*, Pacific J. Math., **2**, 1952.
[167] M. PĂSIĆ, *Isoperimetric inequalities in quasilinear elliptic equations of Leray - Lions type*, J. Math. Pures Appl. (9), **75**, no. 4, 1996.
[168] H. POINCARÉ, *Figures d'equilibre d'une masse fluide*, Naud, Paris, 1903.
[169] G. PÓLYA, *Torsional rigidity, principal frequency, eletrostatic capacity and symmetrization*, Quart. Appl. Math., **6**, 1948.
[170] G. PÓLYA, *On the eigenvalues of vibrating membranes*, Proc. London Math. Soc., **11**, 1961.
[171] G. PÓLYA - G. SZEGÖ, *Isoperimetric inequalities in mathematical physics*, Ann. of Math. Studies, n. 27, Princeton University Press, 1951.
[172] G. PÓLYA - A. WEINSTEIN, *On the torsional rigidity of multiply connected cross-sections*, Ann. of Math., **52**, 1950.
[173] S. POORNIMA, *An embedding theorem for the Sobolev space* $W^{1,1}$, Bull. Sci. Math. (2), **107**, 1983.
[174] M. R. POSTERARO, *Estimates for solutions of nonlinear variational inequalities*, Ann. Inst. H. Poincaré - Anal. Nonlinéaire, **12**, **5**, 1995.
[175] M. R. POSTERARO, *On the solutions of the equation* $\Delta u = e^u$ *blowing up on the boundary*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math, **332**, 1996.
[176] M. H. PROTTER, *Lower bounds for the first eigenvalue of elliptic equations*, Ann. of Math., **71**, 1960.
[177] J.-M. RAKOTOSON, *Réarrangement relatif dans les équations elliptiques quasi-linéaires avec un second membre distribution: application à un théorème d'existence et de régularité*, J. Differential Equations, **66**, no. 3, 1987.
[178] J.-M. RAKOTOSON, *Some properties of the relative rearrangement*, J. Ma-th. Anal. Appl., **135**, no. 2, 1988.
[179] J.-M. RAKOTOSON, *A differentiability result for the relative rearrangement*, Diff. Int. Eq., **2**, no. 3, 1989.
[180] J.-M. RAKOTOSON, *Relative rearrangement for highly nonlinear equations*, Nonlinear Anal., **24**, no. 4, 1995.
[181] J.-M. RAKOTOSON - B. SIMON, *Relative rearrangement on a measure space application to the regularity of weighted monotone rearrangement. I, II*, Appl. Math. Letters, **6**, no. 1, 1993.
[182] J.-M. RAKOTOSON - R. TEMAM, *Relative rearrangement in quasilinear elliptic variational inequalities*, Ind. Univ. Math. J., **36**, no. 4, 1987.
[183] J.-M. RAKOTOSON - R. TEMAM, *A co-area formula with applications to monotone rearrangement and to regularity*, Arch. Rational Mech. Anal., **109**, no. 3, 1990.
[184] LORD RAYLEIGH, *The Theory of Sound*, 2nd ed., Macmillan, London, 1894/96.
[185] J. V. RYFF, *Measure preserving transformations and rearrangements*, J. Math. Anal. Appl., **31**, 1970.
[186] B. DE ST. VENANT, *Mémoire sur la torsion des prismes*, Mémor. pres. divers. savants Acad. Sci., **14**, 1856.
[187] F. SCHULZ - V. VERA DE SERIO, *Symmetrization with respect to a measure*, Trans. Amer. Math. Soc., **337**, 1993.
[188] W. SCHUMANN, *On isoperimetric inequalities in plasticity*, Quart. Appl. Math., **16**, 1958.
[189] B. SCHWARZ, *Bounds for the principal frequency of the nonhomogeneous membrane and for the generalized Dirichlet integral*, Pacific J. Math., **7**, 1957.

[190] E. SPERNER, *Zur symmetrisierung für funktionen auf sphären*, *Math. Z.*, **134**, 1973.
[191] E. SPERNER, *Symmetrisierung für funktionen mehrerer reeller variabel*, Manuscripta Math., **11**, 1974.
[192] E. SPERNER, *Spherical symmetrization and eigenvalue estimates*, Math. Z., **176**, 1976.
[193] W. SPIEGEL, *Über die symmetrisierung stetiger funktionen im euklidishen raum*, Archiv. der Math., **24**, 1973.
[194] J. STEINER, *Einfache Beweise der isoperimetrischen Hauptsätze*, Ges. Werke II, Berlin, 1882.
[195] G. SZEGÖ, *Über einige neue Extremalaufgaben der Potential-theorie*, Math. Z., **31**, 1930.
[196] G. SZEGÖ, *Inequalities for certain eigenvalues of a membrane of given area*, J. Rational Mech. Anal., **3**, 1954.
[197] R. TAHRAOUI, *Symmetrization inequalities*, Nonlinear Anal., **27**, no. 8, 1996.
[198] G. TALENTI, *Best constant in Sobolev inequality*, Ann. Mat. Pura Appl., (4) **110**, 1976.
[199] G. TALENTI, *Elliptic equations and rearrangements*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., (4) **3**, no. 4, 1976.
[200] G. TALENTI, *Nonlinear elliptic equations, rearrangements of functions and Orlicz spaces*, Ann. Mat. Pura Appl. (4), **120**, 1979.
[201] G. TALENTI, *Some estimates for solutions to Monge-Ampère equations in dimension two*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), 8, 1981.
[202] G. TALENTI, *On the first eigenvalue of the clamped plate*, Ann. Mat. Pura Appl. (4), **129**, 1981.
[203] G. TALENTI, *Linear elliptic p.d.e.'s: level sets, rearrangements and a priori estimates of solutions*, Boll. U.M.I. (6), **4-B**, no. 3, 1985.
[204] G. TALENTI, *Rearrangements of functions and partial differential equations*, Nonlinear diffusion problems (Montecatini Terme, 1985), Lect. Notes in Math., 1224, Springer, Berlin-New York, 1986.
[205] G. TALENTI, *Assembling a rearrangement*, Arch. Rational Mech. Anal., **98**, no. 4, 1987.
[206] G. TALENTI, *Some inequalities of Sobolev type on two-dimensional spheres*, General inequalities, 5 (Oberwolfach, 1986), Internat. Schriftenreihe Numer. Math., **80**, Birkhäuser, Basel-Boston, MA, 1987.
[207] G. TALENTI, *Boundness of minimizers*, Hokkaido Math. J., **19**, no. 2, 1990.
[208] G. TALENTI, *Rearrangements and PDE*, Inequalities (Birmingham, 1987), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **129**, Dekker, New York, 1991.
[209] G. TALENTI, *On isoperimetric theorems of mathematical physics*, Handbook of convex geometry, vol. A, B, North-Holland, Amsterdam, 1993.
[210] G. TALENTI, *The standard isoperimetric theorem*, Handbook of convex geometry, vol. A, B, North-Holland, Amsterdam, 1993.
[211] L. TONELLI, *Sur un probleme de Lord Rayleigh*, Monatsh. Math. Phys., **37**, 1930.
[212] R. TOUPIN, *St. Venant's principle*, Arch. Rational Mech. Anal., **18**, 1965.
[213] M. TRANSIRICO, *Symmetrization in a nonlinear degenerate parabolic problem*, Ann. Mat. Pura Appl. (4), **149**, 1987.
[214] C. TROMBETTI, *Existence and regularity for a class of non uniformly elliptic equations in two dimension*, in corso di stampa su *Diff. Int. Eq.*.

[215] G. TROMBETTI - G. L. VAZQUEZ, *Symmetrization results for elliptic equations with lower order terms*, Ann. Fac. Sci. Toulouse, **7**, 1985.
[216] N. S. TRUDINGER, *On embeddings into Orlicz spaces and some applications*, J. Math. Mech., vol. **17**, 1967.
[217] N. S. TRUDINGER, *On new isoperimetric inequalities and symmetrization*, J. Reine Angew. Math., **488**, 1997.
[218] K. TSO, *On symmetrization and Hessian equations*, J. Analyse Math., **52**, 1989.
[219] J. L. VAZQUEZ, *Symétrization pour $u_t = \Delta\varphi(u)$ et applications*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. **295**, 1982 e C. R. Acad. Sci. Paris, t. **296**, 1983.
[220] C. VOAS - D. YANIRO, *Symmetrization and optimal control for elliptic equations*, Proc. Amer. Math. Soc., **99**, no. 3, 1987.
[221] C. VOAS - D. YANIRO, *Elliptic equations, rearrangements, and functions of bounded lower oscillation*, J. Math. Anal. Appl., **134**, no. 1, 1988.
[222] R. VOLPICELLI, *Comparison results for solutions of parabolic equations*, Ricerche di Matematica, **42**, 1993.
[223] H. F. WEINBERGER, *Upper and lower bounds for torsional rigidity*, J. Math. and Phys., **32**, 1953.
[224] H. F. WEINBERGER, *An isoperimetric inequality for the N-dimensional free membrane problem*, J. Rational Mech. Anal., **5**, 1956.
[225] H. F. WEINBERGER, *Symmetrization in uniformly elliptic problems*, Studies in Mathematical Analysis and Related topics: Essays in honor of G. Szegö, Stanford University Press, Stanford, California, 1962.

Dipartimento di Matematica e Applicazioni *R. Caccioppoli*
Università degli Studi di Napoli *Federico II*

Pervenuta in Redazione
il 28 marzo 2000