Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Enrico Bombieri

La matematica nella società di oggi

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **4-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2001), n.1, p. 1–10.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2001_8_4A_1_1_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2001.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. IV-A, Aprile 2001, 1-10

La matematica nella società di oggi (*).

ENRICO BOMBIERI

Da sempre, matematica e società hanno lavorato insieme. Le origini della geometria si possono fare risalire alla agrimensura. La rappresentazione degli angoli in gradi sessagimali, tuttora usata nella pratica, risale agli astronomi babilonesi. Le grandi piramidi dell'Egitto hanno richiesto per la loro progettazione tecniche accurate di geometria e misurazione. In epoca più moderna, troviamo i matematici del Cinquecento al servizio dei principi al fine di creare nuovi mezzi di attacco e di difesa nella guerra. Anche nelle arti e nella architettura la matematica ha avuto un effetto diretto, con l'illustre esempio della pittura di Piero della Francesca.

Col tempo, la scienza è cresciuta: il corpo di nozioni e di conoscenze raggiunte si è ingrandito al punto che la figura leonardesca dello scienziato universale è scomparsa, e società e scienza hanno cominciato a separarsi. A partire da Galileo, la scienza è diventata quantitativa. Non basta più spiegare la materia come miscuglio di aria, terra, fuoco ed acqua, o vedere il comportamento dell'uomo come proporzioni opportune dei quattro temperamenti, flemmatico, collerico, melancolico e sanguigno, corrispondenti ai colori giallo, verde, nero, rosso della bile. Oggi, atomi, molecole, ed i loro arrangiamenti ed interazioni nello spazio sono necessari per capire la fisica e la chimica, così come enzimi, ormoni, cellule, sistema immunitario, fisiologia sono necessari per capire il corpo umano. Ciò ha creato un problema di comunicazione tra lo scienziato, per necessità alta-

(*) Il 30 Settembre 2000 nell'Aula Magna Storica dell'Università di Pisa si è svolta la cerimonia di conferimento del *Diploma ad honorem* di Dottorato di Ricerca in Matematica a Enrico Bombieri. Il presente testo della lezione da lui tenuta in questa occasione è stato gentilmente concesso dall'Università di Pisa per la pubblicazione sul Bollettino.

mente specializzato, e il non esperto, seppur dotato di vasta cultura. Il risultato è una frattura, che si sta allargando sempre di più, tra scienza e società.

Il parlare in termini vaghi di atomi, di elettroni, di protoni, di quarks, di quantum di energia non ci avvicina in modo particolare alla moderna fisica, così come il parlare genericamente di galassie e di quasars e di Big Bang non serve molto per comprendere realmente l'astrofisica di oggi. Né si può pensare che il parlare di doppia elica, di codice genetico, di genoma, di DNA basti per rendersi conto di cosa sia la biologia. Tuttavia il parlarne, sia pure in termini generici, ci fa vedere l'esistenza di un rassicurante collegamento diretto con la realtà, facendoci accettare più facilmente quelle parti che non comprendiamo. Nel caso della matematica la situazione è assai diversa, proprio perché manca questo rassicurante collegamento. Il motivo è chiaro l'oggetto di studio della matematica non è tangibile e reale come per altre scienze. La matematica non è il computer. Quindi ci si domanda: cosa è la matematica? A questa domanda, che mi sono posto molte volte, non è facile rispondere. La conclusione alla quale sono arrivato – certamente non definitiva e che probabilmente modificherò nel futuro – è che *la matematica consiste nello studio delle relazioni tra oggetti.*

Ciò che importa è la relazione e la sua struttura interna; l'oggetto di per sè ha importanza solamente nella misura in cui si riflette nella relazione. Da ciò proviene l'enorme potere di astrazione della matematica e la sua straordinaria potenza di sintesi: gruppi di oggetti molto diversi e in apparenza senza caratteristiche comuni possono diventare matematicamente vicini se hanno relazioni simili.

Vi sono due modi, fra loro complementari, di fare la scienza. La maniera più semplice consiste nell'osservazione, accumulando dati. Il suo scopo è utile, ma non sufficiente, poiché le informazioni raccolte in questo modo sono informazioni di riferimento: nuove idee e nuove intuizioni non vengono di solito leggendo un dizionario. Il punto debole di questo metodo è il fatto che non sappiamo *a priori* cosa osservare, cosa vada conservato e cosa vada scartato. L'esempio massimo al giorno d'oggi di questo tipo di scienza è la corsa alla mappa del genoma umano, cosa certamente utilissima. Tuttavia, sappiamo veramente cosa, e come, si debba mappare? Probabilmente no. È prevedibile che i dati, ed anche il tipo di informazione, raccolti sul genoma umano subiranno importantissime revisioni in un vicino futuro.

L'altro modo di fare scienza è per procedimento induttivo. Di nuovo i dati vengono raccolti ed analizzati. Adesso però questi dati vengono esaminati con uno scopo preciso: scoprire caratteristiche comuni di aspetto e di comportamento, cercando leggi generali che governano l'evoluzione di complicati sistemi. Piuttosto che formare teorie distinte, una per ogni sistema preso in esame, si formano princìpi unificanti e generali. La formulazione di leggi generali è come il buon senso, basato più sull'esame in grande delle strutture di base che attraverso l'esclusivo esame del particolare e del contingente. La scienza di base e con questa la matematica – che definitivamente è una scienza di base – utilizza in modo essenziale questo metodo induttivo.

Vi è un altro aspetto della matematica astratta, oltre a quello di fornire uno strumento eccezionalmente duttile per trasformare concetti astratti in quantità misurabili con precisione: la matematica è una scienza che può studiare se stessa. In termini tecnici, la matematica è una scienza autoreferenziale. Come messo bene in evidenza da De Giorgi nei suoi studi sui fondamenti della matematica, questa caratteristica distingue la matematica dalle altre scienze. La fisica, la chimica, la medicina debbono passare per il vaglio della realtà. Non così la matematica: come in un racconto di Borges, la matematica, studio delle relazioni tra oggetti, trasforma le relazioni stesse in oggetti matematici, che sono pertanto messi in relazione tra loro, creando relazioni tra relazioni, quindi nuovi oggetti, e così via all'infinito. Non è qui la sede per approfondire questo argomento con le sue implicazioni logiche e filosofiche, ma basterà accennare solamente che un ramo della matematica, la teoria delle categorie, si occupa anche di questi problemi.

Un'altra fondamentale caratteristica della matematica è la sua stabilità. Un filosofo come Kuhn negava l'esistenza di rivoluzioni fondamentali nella matematica: ciò che può cambiare è solo l'enfasi e la direzione della ricerca. Possiamo affermare con sicurezza che la matematica è una scienza eminentemente conservatrice, senza grandi rivoluzioni nel corso della sua storia.

La matematica astratta segue, nel suo sviluppo, un criterio di linearità che il matematico motiva spesso con ragioni di tipo estetico. André Weil, uno dei più grandi matematici moderni e di recente scomparso vedeva la matematica allo stesso modo con cui Michelangelo vedeva la scultura, fatta di un materiale duro e difficile dal quale occorre rimuovere il superfluo. Così come la scultura è già contenuta nel blocco di marmo grezzo, la matematica è contenuta nella totalità delle relazioni logiche; l'opera del matematico consiste nell'eliminare le relazioni inutili. Questo ci serve a capire il ruolo dell'intuizione e della motivazione estetica nella matematica. Ad ogni passo, occorre scegliere tra un numero enorme di possibilità. Dovendo scegliere tra il semplice e il complicato, tra la via diretta e la via indiretta, il teorico procede sempre con il rasoio di Occam, tagliando il difficile. Ma allora la matematica resta sempre pura astrazione, arte e intuizione? Sicuramente no. Anche la matematica più astratta, motivata da considerazioni intuitive ed estetiche ha profondi collegamenti con il mondo reale, spesso ha origine altrove. L'esempio recente degli sviluppi nella geometria a tre o quattro dimensioni ottenuti partendo dalla teoria fisica delle stringhe ne è la riprova.

Matematici come Von Neumann, Gödel, Einstein, per menzionare quelli più noti, ma anche Riemann, Hilbert, Poincaré e molti altri, hanno cambiato il nostro modo di pensare nella fisica, logica e filosofia. Il loro influsso nella scienza in generale è stato enorme.

Ci si può domandare: ha importanza tutto questo? Si potrebbe argomentare che se Turing non avesse avuto l'idea di una macchina calcolatrice universale, e Von Neumann non avesse creato il primo grande computer a tubi elettronici in grado di eseguire programmi, certamente il computer sarebbe stato messo insieme da qualche parte, sia pure un poco dopo. Ma questo punto di vista è irrilevante. Il fatto è che dove e quando avvengono scoperte fondamentali ha grandissima importanza nello sviluppo di una nazione. La scienza è fatta dall'uomo e non procede da sola in maniera automatica.

Vi sono molti istruttivi esempi di matematica astratta che hanno trovato e continuano a trovare applicazioni nel mondo reale. Darò qui un esempio, una teoria matematica che ha avuto origine da concreti problemi di fisica, quindi sviluppatasi in direzioni generali ed astratte, trovando infine applicazioni inaspettate che riguardano tutti noi.

Agli inizi dell'Ottocento il matematico Fourier studiò il problema della propagazione del calore. Il calore non si propaga in modo istantaneo, per esempio accendendo una stufetta in una stanza fredda ci vuole un certo tempo prima che si raggiunga una temperatura uniforme. Il problema era di trovare le leggi fisiche che governano questo fenomeno. Ebbene, dopo avere trovato la giusta equazione che descrive la propagazione del calore, Fourier is accinse a risolverla per mezzo di una nuova idea a dir poco straordinaria. Fourier ebbe l'intuizione che una funzione arbitraria (o quasi) può essere sempre decomposta in funzioni elementari, le funzioni seno e coseno associate a frequenze multipli interi di una frequenza iniziale, dando a queste componenti una opportuna intensità. Questa idea, che diede origine ad innumerevoli controversie, si sviluppò in quello che è chiamato analisi armonica. Per molto tempo l'analisi armonica, pur restando uno strumento importante nelle applicazioni, venne approfondita sopratutto in direzioni puramente teoriche.

Oggi, le applicazioni pratiche dell'analisi armonica sono innumerevoli. Un esempio famoso è la TAC, la tomografia assiale computerizzata. Nella TAC si fanno molte radiografie di un oggetto da tutte le direzioni, ottenendo dati che sono l'immagine bidimensionale radiografata sulla lastra sensibile. Il problema è quello di ricostruire l'oggetto a tre dimensioni a partire dalla conoscenza delle varie immagini a due dimensioni. Possiamo pensare alla lastra fotografica, orientata nella direzione voluta, come ad un piano nello spazio. Ora i piani nello spazio a tre dimensioni formano quello che i matematici chiamano uno spazio omogeneo per un gruppo di Lie, nel nostro caso la varietà Grassmanniana dei piani dello spazio; il problema di ricostruzione dell'immagine è un problema di analisi armonica, chiamato il problema di Radon dal matematico che lo considerò per primo novanta anni fa e che lo risolvette teoricamente con una generalizzazione dei metodi di Fourier. La risoluzione pratica del problema di Radon è un'altra cosa, resa possibile dal computer con un programma di software, la Fast Fourier Transform, introdotta negli anni sessanta da Winograd con l'IBM, che svolge nel discreto quello che la trasformata di Fourier svolge nel continuo. La FFT ha permesso di effettuare in tempo reale i complessi calcoli che compaiono nel problema di Radon. Solamente allora la ricerca teorica potè essere usata in campo tecnologico, con le molteplici applicazioni in campo medico note a tutti. Il procedimento simile di Risonanza Nucleare Magnetica dipende da tecniche matematiche vicine, anche se la fisica sottostante si fonda su principi completamente diversi; con la TAC, forma un buon esempio di oggetti differenti con relazioni matematiche simili.

Un esempio importante del procedimento inverso, cioè come la matematica venga motivata dall'esterno, è la matematica discreta dove l'oggetto fondamentale di studio è il discontinuo piuttosto che il continuo. Fanno parte della matematica discreta l'analisi combinatoria e la teoria dei grafi (cioè dei vari modi di collegare punti fra loro), rami che hanno avuto un enorme sviluppo nell'ultimo ventennio, dovuto in larga parte al loro potenziale per applicazioni pratiche e immediate nei settori del computer e delle comunicazioni.

Supponiamo di voler costruire una rete telefonica efficiente, chiaramente un problema di alto interesse pratico. Possiamo visualizzare questa rete come un grafo, i cui vertici sono i centralini di smistamento, connessi con lati, che sono le linee telefoniche che collegano i centralini. Si vuole che la rete sia robusta, cioè anche se un centralino si guasta o ha troppo lavoro c'è un modo facile per far passare ugualmente le telefonate attraverso altri centralini, e si vuole anche che la rete telefonica sia economica, cioè che possa portare molte telefonate usando relativamente poche linee. Una rete è efficiente se è allo stesso tempo robusta ed economica.

Nel caso della rete telefonica possiamo pensare in questo modo. Il grado di un grafo è il massimo numero di lati uscenti da un vertice, quindi grado basso vuol dire meno linee e pertanto economia. D'altra parte, la robustezza si ottiene facendo sì che un gruppo di vertici si colleghi con molti nuovi vertici vicini. Più grande è il rapporto di queste due quantità, più efficiente è la rete.

Fortunatamente, una rete telefonica fatta a caso risulta spesso ragionevolmente efficiente. Ma, in un mondo competitivo quale l'industria odierna, questo non basta. Occorre essere più efficiente degli altri, guadagnando margini di sicurezza e aumentando la propria competitività. Anche un guadagno del 5% in efficienza sulla concorrenza può significare la dominanza di un mercato. I primi tentativi di costruire buone reti mediante regole precise furono una delusione: tutti i grafi ottenuti erano inefficienti. Paradossalmente, era come se fosse meglio costruire un supercomputer con circuiti a caso piuttosto che con una architettura precisa. La soluzione del problema è stata ottenuta solo di recente. La costruzione del grafo stesso, non facile, parte da uno spazio omogeneo per un gruppo di Lie, e dividendo per un sottogruppo discreto; la verifica delle proprietà cercate usa un analogo discreto dell'equazione di Laplace e richiede l'uso dell'analogo, per i corpi di funzioni su un corpo finito, dell'ipotesi di Riemann. Questo è certamente un buon esempio dell'universalità della matematica: l'equazione di Laplace fu introdotta da questo matematico alla fine del Settecento nei suoi studi sulla stabilità degli anelli di Saturno, e Riemann formulò la sua ipotesi nel 1859 in una sua memoria sulla distribuzione dei numeri primi.

Queste ricerche, rese possibili solo attraverso l'uso della matematica astratta, hanno il potenziale di passare utilmente nella pratica. La loro importanza consiste nell'averci dato un nuovo modo di studiare i grafi. Le vere applicazioni pratiche sono nel futuro, forse in una nuova generazione di supercomputers con centinaia di migliaia, se non addirittura milioni, di processori, e nella intelligenza artificiale.

Fino a poco tempo fa, i matematici teorici consideravano un problema risolto se esisteva un metodo conosciuto, o algoritmo, per risolverlo; il procedimento di esecuzione dell'algoritmo era di importanza secondaria. Tuttavia, c'è una grande differenza tra il sapere che è possibile fare qualcosa ed il farlo. Questo atteggiamento di indifferenza sta cambiando rapidamente, grazie ai progressi della tecnologia del computer. Adesso, è importantissimo trovare metodi di soluzione che siano pratici per il calcolo. La teoria della complessità studia i vari algoritmi e la loro relativa efficienza computazionale. Si tratta di una teoria giovane ed in pieno sviluppo, che sta motivando nuove direzioni nella matematica e nello stesso tempo trova applicazioni concrete quali quello fondamentale della sicurezza ed identificazione certa dei dati.

Oggi, in una società che deve integrarsi in una comunità sempre più ampia, in un mondo in cui è necessario ottenere risposte ai quesiti sempre più rapidamente, la matematica deve adeguarsi alla realtà. Anche la matematica più astratta deve individuare le direzioni di ricerca più fertili, rifuggendo dal chiudersi in bizantinismi inutili. Ma come farlo?

Vi sono molte difficoltà. La prima è quella della preparazione di matematici che non siano solamente dei teorici ma che invece non rifuggano dai contatti con l'industria per l'ispirazione di temi di ricerca. Se non vogliamo separare la scienza dalla società, occorre la formazione di scienziati che siano in grado di lavorare a metà strada tra teoria e pratica. Le nostre strutture universitarie sono inadeguate e i programmi di insegnamento vanno riveduti e aggiornati, sia nelle strutture che nei contenuti. La maggior parte dei matematici riceve nell'università una preparazione di tipo accademico che talvolta ha solo fine in se stessa. A volte, ho notato che la ricerca viene motivata più da un aspetto edonistico e dalle difficoltà insite in un problema che da un contenuto dai fondamenti ben radicati. Si generalizza per il solo desiderio di generalizzare. È pertanto necessario creare un nuovo ruolo per il matematico, che lo renda in grado di lavorare direttamente nella società moderna.

Il secondo problema, in parte legato al precedente, e che secondo me sta diventando molto serio, è quello di evitare di produrre un esercito di superspecialisti. Occorrono anche i generalisti. Forse, errori quali il telescopio di Hubble con lo specchio difettoso perché lo strumento per esaminarne la curvatura era stato montato a rovescio, o la sonda di Marte sfracellatasi al suolo durante l'atterraggio a causa dello scambio dalle misure metriche alle misure in pollici dei valori per la spinta dei razzi, sarebbero stati evitati se i rispettivi laboratori avessero avuto più generalisti e meno specialisti. La specializzazione ad un livello prematuro produce effetti positivi immediati, quali la possibilità di buon rendimento iniziale, ma a lungo termine crea persone prive di quella elasticità mentale necessaria per restare al passo richiesto dalla scienza e società moderne. La tecnologia avanzata di oggi è la tecnologia superata di domani, e solamente persone con ampia preparazione di base potranno effettuare i cambiamenti necessari con facilità, meglio ancora anticipandoli.

Un terzo problema, che non è solo un problema italiano, è l'allontanarsi dei giovani dagli studi scientifici e dalla matematica in particolare. Qui possiamo vedere l'effetto di diversi fattori: inadeguatezza dei programmi di studio, spesso obsoleti, ed in particolare la mancanza di un periodo di preparazione dei giovani agli studi superiori, presentando ad essi un quadro realistico delle varie scelte disponibili; la totale mancanza di uno sforzo organizzato per l'inserimento dei giovani al lavoro alla fine degli studi; infine, una sempre più esagerata diffidenza, se non palese opposizione, verso la scienza in generale e le novità portate da questa. Anche la stampa e la televisione, oggi sempre pronte a criticare la scienza, restano silenziose sulla crescita del fenomeno della superstizione. Gli oroscopi ormai fanno parte dei programmi televisivi come i notiziari, e i cartomanti, gli astrologi, gli interpreti del lotto e dei tarocchi hanno avuto in questi ultimi anni un successo sui cui motivi dobbiamo pensare e preoccuparci. Altri fattori, probabilmente di natura transitoria ma che ben vediamo negli Stati Uniti, fanno sì che i giovani più brillanti si allontanino dalla scienza, inseguendo invece le facili carriere miliardarie della nuova finanza e dell'imprenditoria d'assalto. Un altro esempio lo vediamo negli stati che formavano una volta l'Unione Sovietica, nei quali la crisi economica e politica ha causato l'esodo massiccio dei migliori scienziati, con effetto disastroso sulle strutture universitarie di questi paesi.

Dobbiamo allora concludere che la matematica, una volta risolti i problemi ai quali ho alluso, può essere applicata ovunque? La risposta è chiara. Se la matematica è, come credo, lo studio delle relazioni tra oggetti occorre, prima di applicarla, capire gli oggetti in questione. Una matematica applicata alla sociologia, alla politica, alla finanza internazionale richiede anzitutto di capire il tessuto interno di queste materie. La storia dimostra che siamo ben lontani dal conoscere il ruolo dell'elemento umano in esse, e i tentativi di dare un contenuto matematico a queste materie non bastano ancora alla scopo, nonostante i grandi progressi fatti.

In un futuro prossimo si può prevedere che lo strumento matematico, attraverso l'informatica e il computer, entrerà sempre di più a far parte della nostra società. Ma non credo che la matematica si spezzerà in due, matematica astratta e matematica applicata: parafrasando il motto di Pasteur sulla scienza, non esiste la matematica applicata ma piuttosto l'applicazione della matematica.

Enrico Bombieri, Institute for Advanced Study, Princeton, NJ 08540, U.S.A.