Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Umberto Bottazzini

I geometri italiani e il problema dei fondamenti (1889-1899)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **4-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2001), n.2, p. 281–329.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2001_8_4A_2_281_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2001.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol IV-A, Agosto 2001, 281-329

I geometri italiani e il problema dei fondamenti (1889-1899).

UMBERTO BOTTAZZINI

Introduzione.

Nel giugno del 1899 Hilbert dava alle stampe i *Grundlagen der Geometrie*, un'opera che ha segnato una svolta epocale nelle ricerche intorno ai fondamenti della geometria e nella concezione stessa del metodo assiomatico, e sta sullo sfondo della celebre lista di problemi «per le generazioni future» presentati da Hilbert al Congresso Internazionale dei Matematici, che si tenne a Parigi nel 1900. Esso fece seguito ad un analogo Congresso Internazionale di Filosofia, di cui una sezione fu dedicata alla logica e ai fondamenti della matematica.

Quando apparve lo scritto di Hilbert, i fondamenti della geometria costituivano un campo di ricerca particolarmente coltivato in Italia. Da Peano, a Segre, a Veronese, a Pieri, a giovani che si affacciavano al mondo della ricerca come Fano, Amodeo, Vailati e Enriques, numerosi furono infatti i matematici italiani che, pur con motivazioni e intenti diversi, nell'ultimo decennio dell'Ottocento si impegnarono in questo tipo di studi.

Per alcuni di essi i Congressi di Parigi rappresentarono l'occasione per confrontarsi con un pubblico internazionale, e in qualche caso il confronto ebbe esiti di portata storica. Bertrand Russell, ad esempio, non esitava a scrivere nella sua autobiografia che quel Congresso di Filosofia rappresentò «una svolta nella [sua] vita intellettuale, perché vi incontr[ò] Peano». In forza della sua logica matematica, ricordava Russell (1991, 147), Peano «riusciva sempre più preciso di chiunque altro» e «invariabilmente aveva la meglio in ogni discussione in cui si imbarcava». Analogamente, Hans Freudenthal ha osservato che a Parigi i geometri italiani si imposero nelle discussioni sui fondamenti. E tuttavia, dopo il Congresso, essi sparirono dalla scena delle ricerche più avanzate nel campo, così come Peano sparì dalla scena della logica matematica. La loro insomma, conclude Freudenthal (1960, 25), fu una vittoria rimasta senza seguito, «una vittoria di Pirro». Quello che finì per trionfare fu il punto di vista di Hilbert.

Non c'è dubbio che, con l'inizio del nuovo secolo, il problema dei fondamenti finì ben presto per sparire dall'agenda dei geometri italiani. Ha dunque ragione Freudenthal, fu davvero, quella ottenuta al Congresso di Parigi, una vittoria di Pirro? La domanda ne suscita una serie di altre. Quali erano le motivazioni e gli obiettivi dei geometri italiani nelle loro ricerche sui fondamenti? Quale influenza essi esercitarono su Hilbert? E viceversa, quali erano motivazioni e obiettivi di Hilbert? Quale fu l'influenza dei *Grundlagen der Geometrie* sui geometri italiani?

L'opera di Hilbert si può dunque considerare come un termine di paragone e la chiave di lettura dei lavori dei matematici italiani impegnati in analoghe ricerche. Questo punto di vista suggerisce una naturale suddivisione di questo studio in due parti: la prima dedicata all'analisi delle ricerche sui fondamenti in Italia nell'ultimo decennio dell'Ottocento (1); la seconda, alle origini dei *Grundlagen* di Hilbert e alle reazioni dei geometri italiani alla loro pubblicazione.

PARTE PRIMA: I fondamenti della geometria proiettiva

1. – Alla «scuola» di Peano.

Tra gli elementi che caratterizzano il punto di vista assiomatico «moderno», presentato da Hilbert nei *Grundlagen der Geometrie* (in seguito *GG*), viene di solito annoverata l'affermazione che gli enti fondamentali della geometria (punti, rette, piani) sono «oggetti» di

(1) Questa parte costituisce una versione ampiamente rielaborata della relazione «I geometri italiani e i *Grundlagen der Geometrie* di Hilbert» tenuta al XVI Congresso dell'UMI, Napoli 18 Settembre 1999.

cui non si precisa la natura. Hilbert si limita infatti a richiedere che essi soddisfino gli assiomi che vengono enunciati di seguito, ciò che costituisce una definizione implicita degli enti stessi. Tuttavia, il punto di vista adottato da Hilbert non doveva riuscire del tutto nuovo ai geometri italiani familiari coi lavori di Giuseppe Peano, Corrado Segre e i loro colleghi e allievi.

Una diecina d'anni prima dell'apparizione dei *GG* Peano aveva pubblicato *I Principii di geometria logicamente esposti* (Peano 1889b), che facevano seguito ad una analoga trattazione per i principi dell'aritmetica (Peano 1889a), entrambi saggi della potenza del nuovo simbolismo logico che il matematico torinese andava elaborando ([2]). *I Principii* rispondevano ad una questione che era stata sollevata nelle *Vorlesungen über neuere Geometrie* di Moritz Pasch (1882, 98): «Se si vuole che la geometria sia veramente deduttiva il processo deduttivo deve essere totalmente indipendente dal significato dei concetti geometrici, così come deve essere indipendente dalle figure». Il simbolismo di Peano eliminava appunto ogni ricorso a figure e rendeva trasparente il processo deduttivo dagli assiomi ai teoremi.

«Quali fra gli enti geometrici si possono definire e quali occorre assumere senza definizione?» si chiede Peano (1889b, 56) in apertura di quell'opuscolo. «E fra le proprietà, *sperimentalmente vere* [cors. U.B.], di questi enti, quali bisogna assumere senza dimostrazione, e quali si possono dedurre in conseguenza?» L'avvertenza che bisogna seguire «onde non fare lavoro vano», continua Peano, è di «attenersi rigorosamente» a due regole di natura logica: «usare nelle nostre proposizioni solo termini di valore pienamente determinato; ben precisare cosa si intenda per definizione e per dimostrazione» (Peano 1889b, 56). In matematica tutte le definizioni sono nominali, afferma Peano qui e ribadirà numerose volte fino al 1921, nell'ultimo articolo sull'argomento. Sono cioè proposizioni della forma $x = a$, dove x è il segno (o il termine) che si vuol definire e a è un insieme di segni (o termini) noti.

([2]) Per le ricerche sui fondamenti nella scuola di Peano si veda Borga-Freguglia-Palladino (1985) e Lolli (1985).

Il problema delle definizioni è intimamente connesso con la determinazione delle idee primitive di una scienza e l'analisi logica delle idee va di pari passo con la presentazione in termini assiomatici. «Le idee che compaiono in una scienza si distinguono in *primitive* e *derivate*, secondoché non si possono o si possono definire», dice Peano (1891a, 102). Analogamente, «le proposizioni che compaiono in una scienza si distinguono a loro volta in primitive (assiomi e postulati) e derivate (teoremi, corollari, ecc.) secondoché non si possono o si possono dimostrare» (Peano 1891a, 103).

È un *leit-motiv* che il logico torinese non si stanca di ripetere. «Dato un ordine alle idee di una scienza, non tutte si possono definire» ripeterà ancora nel 1921. «Non si può definire la prima idea, che non ha precedenti» così come «non si può definire il segno =, che figura in ogni definizione». Le proprietà fondamentali dei concetti primitivi sono determinate da «proposizioni primitive», gli assiomi, che «fungono in un certo modo come definizioni delle idee primitive» scrive Peano (1921, 432-433) a commento del lavoro di Pieri (1898-99) (v. § 6). Peano non cita Hilbert in quell'occasione, ma lo stesso avrebbe potuto dire per le «definizioni implicite» degli enti primitivi date dagli assiomi dei *GG*.

Le definizioni non si riducono ad «una pura e semplice imposizione di nomi a cose già note o acquisite al sistema», aveva allora osservato Pieri (1898-99, 183). «Il "definire" è inteso da molti in senso più lato: perciò diremo che i concetti primitivi non sian definiti "altrimenti che per postulati"», i quali conferiscono ai concetti primitivi le proprietà caratteristiche che servono agli scopi deduttivi che si hanno in vista. A scanso di equivoci, Pieri (1898-99, 184) aveva proposto il termine «definizione nominale» quando si vuole escludere la definizione «reale» o «di cosa», come sono le «definizioni implicite» degli enti primitivi date dai postulati. Del resto, il ricorso a queste ultime era pratica diffusa tra i geometri italiani, da Fano a Enriques allo stesso Pieri, ed era stato teorizzato da Cesare Burali-Forti, assistente di Peano, nella sua *Logica matematica* (1894).

Per i termini che appartengono al linguaggio comune, o alla logica, ne *I Principii* Peano rimanda ai propri *Arithmetices principia* dove ha presentato il «numero limitatissimo di convenzioni» Peano

(1889b, 57) - dieci in tutto, anche se non tutte necessarie - che permettono di esprimere tutte le relazioni logiche di cui egli si serve. Le proposizioni risultano così formulate «sotto forma rigorosa» nel simbolismo peaniano. Quanto ai termini geometrici, Peano assume come enti non definiti «punto» e «retta limitata» (segmento). Così *I Principii* si aprono con l'avvertenza: «Il segno 1 leggasi punto» e «se a, b sono punti, con ab intenderemo la classe formata dai punti interni al segmento ab» (Peano 1889b, 61).

In quell'opuscolo Peano si limita ai fondamenti della geometria di posizione (nella terminologia di von Staudt e, prima ancora, di Lazare Carnot), in cui non figura il concetto di «moto» (o trasporto rigido) che sta alla base del concetto di congruenza. Che neppure il postulato delle parallele sia soddisfatto in quella geometria Peano lo mostra in appendice con il ricorso ad un modello, come avevano insegnato a fare Beltrami, Klein e Poincaré per le geometrie non euclidee: Se il segno 1 indica i punti interni ad una sfera (o un solido convesso) e ab conserva il solito significato di «segmento», allora sono soddisfatti tutti gli assiomi enunciati, ma non il postulato delle parallele. Partendo dagli enti non definiti «punto» e «segmento» Peano (1889b, 57) definisce «la retta illimitata, il piano e le sue parti, come pure le parti dello spazio», ed enuncia le proposizioni che «esprimono le più semplici proprietà degli enti considerati», cioè gli assiomi, ciascuno dei quali è seguito dai teoremi che ne sono conseguenza.

I primi 11 assiomi de *I Principii* caratterizzano la geometria della retta e coincidono essenzialmente con quelli di Pasch, come riconoscerà in seguito lo stesso Peano (1894a, 127), rivendicando tuttavia di aver ridotto gli enti primitivi dai tre (punto, segmento rettilineo, porzione di piano) assunti dal geometra tedesco, a due. «È chiaro che non tutti gli enti si possono definire», osserva Peano (1889b, 78) nelle note poste a commento del proprio lavoro. «Ma è importante in ogni scienza ridurre al minimo numero gli enti non definiti», pur con la consapevolezza che questa riduzione «presenta alcuna volta dell'arbitrario».

Ridurre al minimo il numero dei concetti primitivi e degli assiomi è preoccupazione costante di Peano fin dal suo primo lavoro di logica, le «Operazioni della logica deduttiva», ispirate all'*Operation-*

skreis (1877) di Schröder e poste in apertura del *Calcolo geometrico* (Peano 1888). Come Schröder, anche Peano dà un'esposizione assiomatica dell'algebra della logica, introducendo una serie di identità che assume come assiomi. «In numero di nove», egli commenta soddisfatto in una nota manoscritta aggiunta alla sua copia del *Calcolo geometrico*, «invece lo Schröder ne ha 13» (in: Bottazzini 1994, 238).

Minore è il numero di concetti primitivi e di assiomi, più profonda è l'analisi. È una convinzione condivisa non solo da Peano e dalla sua «scuola» ma, inizialmente, anche da Hilbert. «La questione del minimo numero di assiomi che possa servire a descrivere i fenomeni geometrici (che si riferiscono cioè alla forma esteriore delle cose) del mondo esterno non sembra ancora al giorno d'oggi completamente risolta», scrive Hilbert a Klein nel 1893 [in: Hilbert-Klein, 90]. L'allusione di Hilbert ai «fenomeni geometrici del mondo esterno» può sembrare sorprendente. Ma è sufficiente una lettura attenta delle pagine dei *GG* o della relazione sui problemi matematici che Hilbert (1900) presenta al Congresso di Parigi per rendersi conto di quanto sia parziale l'immagine corrente di Hilbert come matematico 'formalista', preoccupato solo della sintassi delle teorie matematiche.

Quando a Parigi si accinge a presentare i suoi «problemi matematici» per «le generazioni future» Hilbert ricorda l'ultimo teorema di Fermat e il problema dei tre corpi — il primo «invenzione della ragione pura», il secondo «necessario per comprendere i fenomeni più semplici e fondamentali della natura». Insomma, i «poli opposti» di una «interazione tra pensiero ed esperienza», tra potenza creativa della ragione pura ed esperienza empirica, che si rinnova continuamente, alimentando lo sviluppo della matematica. Quanto alla geometria, per Hilbert «l'esposizione degli assiomi» e «l'indagine sui loro mutui rapporti» porta non già alla messa in secondo piano dell'intuizione, come spesso si afferma, bensì «all'analisi logica della nostra intuizione dello spazio», come si legge ad esempio nell'introduzione ai *GG*, dove Hilbert rinvia in nota all'Appendice dei *Fondamenti* di Veronese (1894) e a Klein (1898).

Per Peano una tale analisi rivela invece «l'inutilità del termine *spazio*», come dirà in un pungente commento alle idee che «nei comuni trattati si dànno come primitive» in geometria, osservando che «l'esempio di Euclide e di tanti altri che non ne parlano affatto è del tutto convincente» (Peano 1894a, 117). Anche se in quell'articolo egli continua «ad usare il termine *spazio* nel significato usuale», Peano fa tuttavia notare che pure i concetti di solido, superficie e linea sono «alquanto indeterminati», come egli stesso ha mostrato con l'esempio di una linea che riempie un quadrato e di curva in cui ogni arco riempie un volume (Peano [1890]).

Gli assiomi XII-XVI de *I Principii* introducono la geometria di posizione del piano e dello spazio. In particolare, l'assioma XV asserisce che «dato un piano, esistono dei punti non contenuti in esso» e l'assioma XVI che «dato un piano, e due punti da bande opposte del piano, allora ogni punto dello spazio o sta sul piano dato, ovvero uno dei segmenti che lo uniscono ai punti dati incontra il piano» (Peano 1889b, 89). In altri termini, lo spazio dato ha tre dimensioni. Gli assiomi XV e XVI, aggiunge Peano, consentono di ricavare il teorema di Desargues «e le sue innumerevoli conseguenze» (che costituiranno invece una parte essenziale dei *GG* di Hilbert).

Peano osserva tuttavia che, senza ricorrere agli assiomi XV e XVI, si può dimostrare che «i piani che uniscono un punto e con due rette ab e cd d'uno stesso piano non passante per e s'incontrano secondo una retta». Questa proposizione e l'assioma XV sono sufficienti a stabilire il teorema dei triangoli omologici nello spazio, come egli stesso mostrerà qualche anno più tardi (Peano 1894a, 139). In quell'occasione Peano osserverà che anche il teorema di Desargues nel piano è conseguenza dell'assioma XV «e quindi è un teorema di Geometria solida». Con un opportuno modello dimostrerà poi che quel teorema non è in generale conseguenza degli assiomi I-XIV. Infatti, «se per p intendiamo i punti di una superficie, e se con $c \in ab$ intendiamo di dire che il punto c sta sull'arco di geodetica che unisce i punti a e b, allora sono verificati tutti i postulati dall'I al XIV, e non sussiste sempre la proposizione sui triangoli omologici. Questa proposizione però continua a valere per le superficie a curvatura costante» (Peano 1894a, 139).

Infine, in appendice Peano enuncia l'assioma XVII di continuità della retta, «necessario in molte altre questioni», sotto la forma: «Se h è una figura convessa, e se a e b sono punti, il primo appartenente *h*, il secondo non, allora si può determinare un punto *x* appartenente al segmento *ab*, o ai suoi estremi, in guisa che il segmento *ax* sia contenuto in *h*, e il segmento *bx* sia tutto fuori di *h*». In seguito Peano (1894a, 140-141) farà osservare che l'assioma si può enunciare nella forma equivalente: «Dati due punti *a* e *b*, e una classe *k* di punti, classe effettivamente esistente, e contenuta nel segmento *ab*, allora si può determinare un punto *x* appartenente al segmento *ab*, o coincidente con *b*, tale che nessun punto della classe *k* appartenga al segmento *xb*, ma tale che comunque si prenda il punto *y* fra *a* ed *x*, sempre esistono punti della classe *k* compresi fra *y* e *b*».

Nelle note esplicative, poste a conclusione dell'opuscolo, Peano ribadisce il carattere arbitrario attribuito agli enti primitivi. «*Il lettore* — scrive Peano (1889b, 77) — *può intendere col segno* 1 *una categoria qualunque di enti, e con* c ∊ *ab una relazione qualunque fra tre enti di quella categoria; avranno sempre valore tutte le definizioni che seguono e sussisteranno tutte le proposizioni* [cors. U.B.]». E tuttavia questa ribadita arbitrarietà della natura degli enti primitivi sembra soddisfare più a un astratto desiderio di generalità che a una convinzione reale, e male si accorda con l'iniziale richiesta di verità «sperimentale» delle proprietà assunte come assiomi. «Secondo me — confessa Peano in una lettera a Federico Amodeo del marzo 1891 — una teoria, per essere utile, deve sviluppare le conseguenza dei postulati sperimentali» (in: Palladino 2000, 82-83). Altrimenti accade come ai filosofi medioevali, che «si sono lambiccati il cervello su ipotesi non sperimentali, e i cui risultati non sono verificabili coll'esperienza». Ebbene, si chiede Peano, cosa è rimasto delle loro «elucubrazioni», dei loro «splendidi ragionamenti»? «Nulla! Chiunque li legge esclama di necessità: peccato che ingegni così potenti si siano occupati di questioni così frivole!».

Peano, invece, sa bene quali sono le questioni cui utilmente applicare la potenza del suo ingegno. Ha ragione Fano (1892, 108) quando scrive che Peano «parte dalle idee intuitive (o supposte tali)» di punto e segmento rettilineo e Pieri (1896-1899, 84) quando accomuna Peano a Pasch nell'«indirizzo *fisico-geometrico*», secondo il quale gli assiomi derivano dall'osservazione del mondo esterno e «sono identificati con le idee che si acquistano per via d'induzione sperimentale» da fatti empirici. Pasch (1882, iii) aveva apertamente dichiarato che «i concetti geometrici originariamente corrispondono proprio agli oggetti empirici». Non dissimili sono le idee di Peano. Da parte sua, Pieri «prescinde da ogni interpretazione fisica delle premesse, e quindi anche dalla loro *evidenza* e *intuitività* geometrica».

Presa alla lettera, l'affermazione di Peano sull'arbitrarietà degli enti primitivi avrebbe richiesto prove di indipendenza e di non-contraddittorietà degli assiomi, come cercherà di fornire Hilbert nei *GG*. Per quanto riguarda l'indipendenza, Peano ne avverte l'importanza anche se, ne *I Principii*, si limita a dichiarare che la prova di indipendenza è affidata all'ordine in cui sono sono enunciati gli assiomi. Infatti, dall'ordine discende il loro «valore», afferma Peano (1889, 57), «e si è moralmente certi della loro indipendenza». Una certezza «morale» che ai nostri occhi male si accorda con «l'assoluto rigore» che egli rivendica. D'altra parte, lo stesso concetto di indipendenza ordinale degli assiomi sarà ripreso dai geometri italiani che scriveranno sull'argomento, fino all'apparizione dei *GG* di Hilbert. C'è un'ulteriore conseguenza, implicita nelle parole di Peano ed esplicita nei *GG*. Dal momento che l'ordine in cui sono enunciati gli assiomi ne assicura l'indipendenza, ne segue che per Peano il teorema di Desargues nel piano si può stabilire senza ricorrere ad un assioma di continuità.

Se l'indipendenza (ordinale) degli assiomi è rilevante agli occhi del matematico torinese proprio al fine di ridurre il numero delle assunzioni primitive, la non-contraddittorietà è invece per Peano questione irrilevante, e non viene neppure menzionata ne *I Principii*. Ancora nel 1906, mentre infuriano le polemiche sui paradossi della teoria degli insiemi che sembrano minare i fondamenti della matematica, egli scrive (in *latino sine flexione*): «Proba que systema de postulatos de Arithmetica, aut de Geometria, non involve contradictione, non es, me puta, necessario» (Peano 1906, 343). La ragione è presto detta: «Nam nos non crea postulatos ad arbitrio, sed nos sume ut postulatos propositiones simplicissimo, scripto in modo explicito aut implicito, in omni tractatu de Arithmetica, aut de Geometria. Nostro analysi de principios de ce scientias es reductione de affirmationes commune ad numero minimo, necessario et sufficiente».

Le parole di Peano chiariscono e delimitano la natura delle sue ricerche sui fondamenti (della geometria in questo caso, ma lo stesso si può dire dell'aritmetica) e la sua concezione del metodo assiomatico. Si tratta di mostrare, servendosi della logica matematica, come si possano organizzare in un sistema assiomatico le nozioni geometriche (o aritmetiche) che sono comunemente presentate nei manuali di geometria (o di aritmetica) elementare. Insomma, come aveva già detto a proposito della geometria, la sua è «un'analisi delle proposizioni fondamentali fatta con gli strumenti della logica matematica» (Peano 1894a, 119), in vista della loro riduzione al numero minimo, necessario e sufficiente.

Nello stesso lavoro, in una «osservazione sulla natura pratica, o sperimentale dei postulati» Peano (1894a, 141) aggiunge che chiunque può premettere le ipotesi che vuole e svilupparne le conseguenze logiche. «Ma affinché questo lavoro meriti il nome di Geometria, bisogna che quelle ipotesi o postulati esprimano il risultato delle osservazioni più semplici ed elementari delle figure fisiche». La posizione di Peano è chiara: se i postulati corrispondono a «fatti reali», non c'è bisogno di alcuna prova di coerenza. Al contrario, «proba de coexistentia de systema de postulatos pote es utile, si postulatos es hypothetico, et non respondentes ad factu reale» (Peano 1906, 343). D'altra parte, la rinuncia all'arbitrarietà degli assiomi («nos non crea postulatos ad arbitrio»), finisce col contraddire l'affermazione, tante volte ribadita da Peano, sulla natura «qualunque» degli enti primitivi.

Le affermazioni di Peano intorno ai postulati della geometria (e dell'aritmetica) lasciano tra l'altro intravedere il carattere e il senso del *Formulario matematico*, l'impresa enciclopedica già concepita nel 1891 cui egli si dedicherà negli anni a venire. Siamo riusciti a rappresentare tutte le relazioni logiche con pochi segni, dal significato preciso e soggetti a regole ben determinate, scrive Peano (1894b, 125) nella presentazione del *Formulario*. Introducendo dei segni opportuni per indicare le idee della geometria, si possono enunciare completamente in simboli tutte le proposizioni geometriche. Lo stesso si può dire dell'aritmetica e delle altre parti della matematica sottoposte ad un trattamento assiomatico.

A differenza di Hilbert, Peano non riconosce al metodo assiomatico una funzione euristica, ma gli affida per così dire un ruolo regolatore e ordinatore. Il metodo assiomatico, coniugato con il simbolismo della logica matematica, consente infatti di formulare in maniera rigorosa le teorie matematiche ormai «mature» e consolidate. Quelle appunto che troveranno spazio nel *Formulario*. «Il est possibile de publier un *Formulaire de Mathématiques* qui contienne toutes les méthodes, toutes les démonstrations, *toutes les propositions connues* [cors. U.B.] dans les sciences mathématiques» proclama Peano (1896-1899, 199).

2. – Klein e i fondamenti della geometria.

La pubblicazione de *I Principii* di Peano si accompagnò alla contemporanea pubblicazione della *Geometria di posizione* (*Geometrie der Lage*) e dei primi capitoli dei *Beiträge* di von Staudt, nella «limpida traduzione» [Levi 1913, 773] che ne aveva fatto Mario Pieri su invito di Corrado Segre, giovanissimo professore di Geometria superiore a Torino. Se le *Vorlesungen* di Pasch costituirono il testo di riferimento e l'ideale termine di confronto di Peano nelle sue ricerche sui fondamenti e gli assiomi della geometria, Felix Klein fu l'interlocutore privilegiato di Segre e di molti dei geometri italiani che allora s'impegnarono in questo campo.

Da tempo in rapporti scientifici con Klein, Segre aveva allora scritto al matematico di Gottinga proponendogli di «consentire» alla traduzione italiana del cosiddetto *Programma di Erlangen*. Quel lavoro, osservava Segre, non era «abbastanza noto ai *giovani geometri italiani*» [in: Klein 1890a, 1] e lo stesso Klein non sembra avesse fatto molto per diffonderlo [Hawkins 1984]. Tra le cose «non sufficientemente conosciute e studiate dai giovani», contenute nel *Programma*, Segre ricordava le «tante giuste osservazioni» intorno ad alcune teorie tra «le più discusse, come quella delle varietà più volte estese, e la geometria non euclidea».

Da parte sua, Klein aveva «accondisceso tanto più volentieri» alla proposta del collega italiano in quanto, a suo dire, la pubblicazione della *Theorie der Transformationsgruppen* di Engel e Lie, di cui erano apparsi i primi due volumi (1888 e 1890) poteva contribuire ad accrescere l'interesse dei geometri per le idee contenute nel *Programma.* Per quanto riguardava in particolare la geometria non euclidea, si annunciava prossima la pubblicazione (postuma) del II volume delle *Vorlesungen über Geometrie* (1891) di Clebsch, curate da Lindemann dove — affermava Klein — la teoria era presentata «da un punto di vista che non è molto diverso dal mio».

A quasi vent'anni dai lavori su quelle che egli aveva chiamato le «cosiddette» geometrie non euclidee (Klein 1871, 1873), per la prima volta da quando si era trasferito a Gottinga nel 1886 Klein aveva scelto infatti di tenere nel semestre invernale 1890-91 un corso di lezioni sulla geometria non euclidea, che furono poi pubblicate in due volumi litografati a cura di F. Schilling (Klein 1892).

La traduzione italiana del *Programma* ad opera di Gino Fano — un allievo di Segre, che trascorrerà a Gottinga un periodo di studio con Klein — rappresentò l'inizio della sua effettiva circolazione negli ambienti matematici europei. Nel giro di pochi anni apparvero infatti la traduzione francese (1891), quella inglese (1893), la ristampa nei «Mathematische Annalen» (1893) e in seguito, tra il 1895 e il 1897, le traduzioni in polacco, russo e ungherese.

Il corso sulle geometrie non euclidee fornì inoltre a Klein l'occasione per pubblicare nei «Mathematische Annalen» un articolo di sintesi [Klein 1890b] delle moderne ricerche nel campo. Klein cominciava con un'esposizione dettagliata delle idee di Clifford (la teoria delle «parallele sghembe» dello spazio ellittico e lo studio delle proprietà della quadrica di Clifford) e una discussione del «problema di Clifford-Klein» di determinare tutte le varietà bidimensionali a curvatura costante ovunque regolari. Dopo aver presentato gli elementi della geometria di posizione di von Staudt in una maniera «essenzialmente più intuitiva», nell'ultima parte dell'articolo egli si soffermava sul significato di «quella concezione della geometria non euclidea che comincia con la geometria proiettiva», che lo stesso Klein aveva proposto nei suoi lavori del 1871 e 1873, e affrontava "più esplicitamente che mai in passato» il problema dei fondamenti.

Aggirando una questione lasciata aperta da von Staudt, in quei lavori Klein aveva mostrato come si potessero definire le coordinate dei punti con metodi puramente proiettivi, e dunque sviluppare la geometria proiettiva prima di risolvere il problema di determinare la metrica. «In che senso — si chiedeva ora Klein [1890b, 380] — risulta psicologicamente corretto trattare la geometria proiettiva prima della geometria metrica (*Geometrie des Masses*), e addirittura considerare la prima come fondamento della seconda?» Secondo Klein, la ragione ultima risiedeva nella distinzione tra le proprietà «meccaniche» e quelle «ottiche» dello spazio. Per Helmholtz bisognava assumere come fondamentali le proprietà meccaniche, che «trovano nella libera mobilità dei corpi la loro espressione matematica». Ma «i miei lavori — obiettava Klein — mostrano che si può cominciare altrettanto bene dalle proprietà ottiche», e assumere dunque come fondamento «l'intuizione proiettiva».

Quanto alla natura degli assiomi geometrici, Klein respingeva la concezione di Helmholtz, ormai «generalmente diffusa», secondo la quale essi «formulano i «fatti» dell'intuizione spaziale» in maniera così completa da rendere superfluo ogni ulteriore ricorso all'intuizione. Al contrario, ribadiva Klein (1890b, 381), nel «vero pensiero geometrico» ci soccorre ad ogni passo «l'intuizione spaziale». Al punto che, egli scriveva, «in ogni caso per me è impossibile condurre un ragionamento geometrico in termini puramente logici, senza avere continuamente davanti agli occhi la figura alla quale ci si riferisce». Questa perentoria affermazione appare ancor più significativa se si pensa alle concezioni radicalmente opposte allora sostenute da Peano e dai suoi allievi e, in seguito, da Hilbert.

L'intuizione è «qualcosa di *essenzialmente* impreciso», era pronto ad ammettere Klein. «Ora, l'assioma per me è la richiesta (*Forderung*) mediante la quale stabilire nell'intuizione imprecisa degli enunciati precisi». Agli occhi di Klein, gli assiomi costituiscono quindi una specie di «saldo substrato logico» su cui appoggiare le considerazioni intuitive. Ci poteva essere una certa «tolleranza» nella scelta di differenti sistemi di assiomi, affermava Klein, ma il grado di arbitrarietà degli assiomi doveva comunque essere compatibile con l'intuizione spaziale. Quanto all'origine degli assiomi, egli si limitava ad affermare che il processo di astrazione da esperienze empiriche, che porta alla loro formulazione, avviene «in maniera involontaria». Ovvero, «scaturisce da una esigenza della nostra propria natura», come aveva detto a lezione (Klein 1892, I, 357).

Lo stesso Klein riprenderà l'analisi del problema degli assiomi geometrici nel rapporto scritto per la Società fisico-matematica di Kazan in occasione dell'attribuzione a Sophus Lie del Premio Lobacevskij. In questo scritto relativamente poco noto ma, come abbiamo visto, ricordato da Hilbert (1899), Klein (1898) faceva precedere il proprio punto di vista dalla rassegna delle diverse posizioni sul problema dei fondamenti, che erano emerse a partire dai lavori di Riemann ed Helmholtz fino ai più recenti contributi di Lie, di Pasch, di Veronese e dei geometri italiani che avevano proposto sistemi assiomatici per la geometria proiettiva «astratta».

«Da dove vengono gli assiomi?» si chiedeva Klein. Dopo gli sviluppi della geometria non euclidea non era più condivisibile l'opinione che era stata di Kant, che gli assiomi rispondano a «delle necessità dell'intuizione interiore» (Klein 1898, 386). Secondo Klein invece, «l'essenza vera e propria» degli assiomi risiedeva nella «idealizzazione dei dati empirici». Si trattava poi di assicurarsi che gli enunciati corrispondessero ai fatti dell'esperienza, e che fossero esenti da contraddizioni. Come ciò si potesse fare Klein non dice, e neppure cerca di chiarire cosa egli intenda con «intuizione», un termine che, corredato da diversi aggettivi («proiettiva», «spaziale», «geometrica», «interiore», ecc.) appare tanto vago nella definizione quanto fondamentale nella visione di Klein. Egli aveva cercato di darne una caratterizzazione nelle sue «conferenze americane» (1893), distinguendo tra intuizione «ingenua» e «raffinata» (in: Nastasi 2000, 97-105), la prima associata alla razza tedesca, la seconda — cioè «il senso critico e puramente logico» — alle «razze latine e ebraiche» (3).

«È inutile dire che solo dopo la redazione del rapporto precedente [Klein 1898] si è avuto l'intero sviluppo della moderna assiomatica», egli osservava in una nota aggiunta al rapporto nel 1923, al mo-

(3) Questa infelice sortita di Klein fu ripresa una quarantina d'anni più tardi dai matematici nazisti per cercare di suffragare autorevolmente teorie razziste della matematica.

mento dell'edizione delle sue *Gesammelte Abhandlungen*. Ma proprio per questo le idee contenute in quello scritto sono tanto più interessanti. Un anno dopo la redazione di quel rapporto Hilbert darà alle stampe i *GG*, introducendo un punto di vista completamente diverso che, in parte contro le intenzioni del suo autore, finirà per destinare alle discussioni dei filosofi il problema della natura dell'intuizione e dello spazio, così come quello dell'origine e della natura degli assiomi della geometria e la loro adeguatezza a dar conto dei fatti dell'esperienza. E sarà appunto vestendo gli abiti del filosofo prima ancora che del matematico, che ne parleranno Poincaré ed Enriques nei primi anni del Novecento.

Di fatto, dopo la pubblicazione dei *GG,* Klein non interverrà più nel dibattito sui fondamenti della geometria. Secondo Freudenthal, «Klein non ha rifiutato l'indirizzo assiomatico, ma non ha capito i suoi problemi» (in: Toepell 1986, 108). A maggior ragione, è significativo il rinvio, posto da Klein in chiusura di quella nota, all'articolo di Enriques *Prinzipien der Geometrie* (1907) apparso nell'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* (v. § 7), un articolo ispirato alle idee di Klein, più che alle concezioni di Hilbert.

3. – La geometria degli iperspazi.

Se *I Principii* di Peano si affiancavano a un lontano lavoro di De Paolis (1881) nel fornire una trattazione assiomatica dello spazio proiettivo ordinario, lasciavano invece aperta l'analoga questione per gli spazi ad un numero r qualunque di dimensioni, che l'anno successivo Segre proponeva ai suoi studenti del corso di *Geometria sopra un ente algebrico*: «Definire lo spazio S_r non già mediante coordinate, ma con una serie di proprietà dalle quali la rappresentazione con coordinate si possa dedurre come conseguenza» (in: Fano 1892, 106).

Contrariamente a Peano, Segre vede le questioni dei fondamenti della geometria nella prospettiva della ricerca geometrica più avanzata. Non si tratta di analizzare con tutto il rigore della logica peaniana le proposizioni fondamentali della geometria elementare, bensì di definire in maniera rigorosa un sistema di assiomi indipendenti per un iperspazio proiettivo S_r, che agli occhi di Segre è l'ambiente naturale in cui si devono collocare le ricerche geometriche. Egli ritorna sulla questione in una breve nota indirizzata ai suoi studenti e apparsa nel primo numero della «Rivista di Matematica» fondata da Peano. «Accade tuttora, anche in Italia, che non si sappia collocare la geometria ad n dimensioni al suo giusto posto», osserva Segre (1891, 407). Inoltre, «non è ancora stato assegnato e discusso un sistema di postulati *indipendenti* che serva a caratterizzare lo spazio lineare a n dimensioni, sì che se ne possa dedurre la rappresentazione dei punti di questo con coordinate».

Allo scopo si poteva estendere «il linguaggio geometrico al caso di un numero qualunque di valori (*coordinate* del punto) di n variabili», e definire un iperspazio come «l'insieme di tutti questi punti o gruppi di valori». Ma in questo modo, osserva Segre, gli enti considerati si riducono ad essere «essenzialmente analitici» e il contenuto geometrico passa in secondo piano. Per esempio, la geometria proiettiva per tali spazi «non è altro in sostanza che l'algebra delle trasformazioni lineari».

Altrimenti, seguendo la via indicata da Plücker, si potevano considerare come punti di uno spazio a più dimensioni enti dello spazio ordinario pensati come dipendenti da un numero qualsiasi di parametri. Tuttavia, così facendo «la geometria degli iperspazi non presenta più alcuna novità di concetto». Infine c'era la proposta di Veronese (1891) di definire lo spazio ad n dimensioni «allo stesso modo di quello ordinario, solo che si tolga il postulato delle tre dimensioni» (e si modifichino quindi alcuni postulati relativi alla retta e al piano). Tutte queste distinzioni non hanno per Segre grande rilevanza. La mancanza di una soddisfacente teoria assiomatica degli spazi a n dimensioni, egli osserva, non impedisce al geometra di «lavorare negli iperspazi senza fissare quale sia tra le varie definizioni quella che [...] sceglie», e «addirittura [di] tenerle tutte».

Agli occhi di Segre le indagini sui fondamenti hanno interesse solo se consegnano al matematico strumenti di ricerca più efficaci. Quando si tratta di «scoprire la verità», afferma Segre, la «purezza del metodo» passa in secondo piano e talvolta anche il rigore, come era accaduto altre volte nella storia della geometria, per esempio per gli elementi immaginari, gli enti «impropri» o il «principio di continuità» di Poncelet.

L'atteggiamento pragmatico di Segre provoca l'immediata reazione di Peano, che in alcune *Osservazioni del Direttore* aggiunte allo scritto del collega rivendica l'esigenza di un «rigore assoluto». Un ricercatore «può fare le ipotesi che più gli piacciono», ma una volta fatta la scelta, «spetta alla matematica», che per Peano non è altro che «una logica perfezionata», dedurre le conseguenze in maniera assolutamente rigorosa. L'ironia è sferzante: «Chi enuncia delle conseguenze che non sono contenute nelle premesse, potrà fare della poesia, ma non della matematica» (Peano 1891b, 67).

La diversa concezione che i due hanno del rigore e del suo ruolo in matematica balza agli occhi. È l'aspetto della polemica che è stato più volte sottolineato. Per quanto importante, la questione del rigore mette tuttavia in secondo piano la sostanza matematica che è in discussione: come lavorare negli iperspazi? Segre ha in mente il metodo sintetico della proiezione (e della sezione) da uno spazio S_r in un altro di dimensione inferiore (in particolare S_3), la cui fecondità Veronese (1882) ha mostrato in un lavoro che «ha fatto veramente epoca». Con le parole di Segre (1891, 410), l'idea fondamentale di Veronese è che «certe configurazioni dello spazio ordinario si ottengono quali sezioni della configurazione determinata da un numero qualsiasi di punti di un iperspazio qualunque». È un'idea che Segre fa propria nei suoi lavori di geometria iperspaziale, a partire dalla sua tesi di laurea.

«La geometria degli spazi ad un numero qualsiasi n di dimensioni ha preso ormai il suo posto tra i rami della matematica» aveva scritto allora Segre (1883a, 26). Anche quando «l'elemento o punto di un tale spazio non si consideri come un ente geometrico dello spazio ordinario (e neppure, il che fa lo stesso come un ente analitico costituito dai valori di n quantità variabili), ma bensì come un ente a sé, *la natura intima del quale si lascia indeterminata* [cors. U.B.], non si può rifiutare di ammetterla come scienza, in cui tutte le proposizioni sono rigorose, perché dedotte con ragionamenti essenzialmente matematici; la mancanza di una rappresentazione pei nostri sensi degli enti che essa studia non ha molta importanza pel matematico puro».

La definizione di spazio lineare data da Segre si presta a critiche dal punto di vista del rigore, farà osservare Peano. Ma quelle critiche, avverte Beniamino Segre (in una nota del curatore in: Segre 1883a, 38), non toccano la correttezza dei risultati, in questo e negli altri lavori di Corrado Segre dedicati alla geometria degli iperspazi.

Lasciare indeterminata la «natura intima» dei punti degli iperspazi apre la via alla possibilità di stabilire isomorfismi tra spazi lineari: «tutti gli spazi lineari ad uno stesso numero di dimensioni, qualunque siano i loro elementi si possono riguardare come identici tra loro» afferma Segre (1883a, 46). Così, per esempio, assumendo come nota la teoria della retta, del piano e dello spazio ordinari, considerati come punteggiati, è possibile utilizzarla «per tutti gli spazi lineari ad 1, 2, 3 dimensioni contenuti nello spazio lineare ad $n-1$ dimensioni che si vuol studiare in generale». Altrettanto naturale è considerare la geometria della retta come quella di una quadrica a 4 dimensioni in uno spazio lineare a 5 dimensioni, come già avevano insegnato Plücker e Klein, e come egli fa nell'ultima parte della tesi, dove definisce la retta «come l'elemento di una quadrica non specializzata a 4 dimensioni» e aggiunge in nota che «il vantaggio» di questa definizione consiste nel fatto «che, con soli mutamenti di parole, la geometria che fondiamo su questa definizione darà la geometria di qualunque spazio quadratico a 4 dimensioni, in cui l'elemento sia diverso dalla retta ordinaria» (Segre 1883b, 127).

Per quanto influenzato dai metodi di Veronese, Segre prende le distanze dal suo punto di vista in un articolo del 1885. Come ha osservato Brigaglia (1994, 250), al di là delle differenze di linguaggio, quell'articolo rivela parecchie (e inaspettate) «affinità tra le affermazioni di Segre e alcune considerazioni di Peano». Dopo aver ribadito «il fatto evidente che tutte quelle proprietà di una varietà che dipendono unicamente dalla sua linearità e dalla sua estensione sussistono pure per tutte le varietà lineari aventi la stessa estensione» — fatto che «mette in luce» l'importanza della geometria proiettiva negli iperspazi «quando all'elemento o punto dello spazio in essa considerato non si attribuisca alcun carattere speciale» — Segre sottolinea che nelle sue ricerche Veronese «si pone da un punto di vista diverso».

Infatti, in un recente articolo dedicato allo studio della superficie che oggi porta il suo nome, Veronese (1883-84, 345) aveva affermato che il metodo da lui adottato era sintetico e *intuitivo* perché, a suo dire, «il punto, la retta, il piano e lo spazio a tre dimensioni in quello a *n* dimensioni sono elementi di *natura nota*, cioè hanno sempre lo stesso significato, quello che posseggono nello spazio ordinario». Ed in una lunga nota ribadiva: «Il mio punto di vista non è soltanto sintetico ma altresì rappresentativo senza alcun substrato analitico, ove *l'elemento generatore non è già un elemento di natura qualsiasi, ma il punto tale e quale ce lo immaginiamo nel nostro spazio* [cors. U.B.]».

Ecco perché non solo è lecito per Veronese soccorrere «di continuo» l'immaginazione con figure tracciate sulla carta che «in qualche modo» rappresentano in prospettiva punti, rette, piani e superficie dello spazio *n*-dimensionale, ma egli può affermare di non «adottare la definizione puramente analitica accettata comunemente di un tale spazio» secondo cui «un elemento (di natura qualsiasi) è determinato da *n* quantità». Insomma, dichiara Veronese, «non sono più dunque i risultati dell'analisi che rivesto del linguaggio sintetico, *ma sono le costruzioni geometriche da cui parto, a cui applico poi il metodo analitico, quando lo credo opportuno*» (Veronese 1883-84, 346).

Questo punto di vista sta alla base dei *Fondamenti di geometria a più dimensioni*, il volume che Veronese dà alle stampe nello stesso anno della polemica tra Peano e Segre, ma al quale egli pensava fin dal 1882 «per mostrare elementarmente come la geometria degli spazi a più di tre dimensioni si possa svolgere in modo perfettamente analogo a quella del piano e dello spazio ordinario» (Veronese 1891, v). Quanto «elementari» siano le argomentazioni di Veronese può giudicare chiunque si sia cimentato nella lettura di quel volume (4).

Quando il libro è già «sotto stampa» Veronese pubblica una nota lincea (5) originata da una discussione con Otto Stolz intorno ai

(4) Per un'analisi dell'opera di Veronese sui fondamenti della geometria si veda Cantù (1999).

(5) Veronese (1889). La nota è stata tuttavia «letta nella seduta del 21 dicembre 1890».

«principi del continuo rettilineo» e il posto che vi occupa l'assioma di Archimede. «Secondo me — afferma Veronese (1889, 603) — la matematica pura non è nei suoi fondamenti una combinazione arbitraria di segni ma è una scienza di concetti che scaturiscono direttamente dagli assiomi logici, da operazioni mentali comuni a senso determinato e unico e dall'esame del continuo intuitivo nella sua forma più semplice». In particolare, quando si tratta di fondamenti della geometria, gli «assiomi devono derivare dall'intuizione spaziale senza per questo trascurare tutte le ipotesi astratte possibili che non contraddicono a questi assiomi» (Veronese 1889, 612).

Così, facendo propria la distinzione di Grassmann tra scienze reali e formali, nei *Fondamenti di geometria* Veronese (1891) comincia col distinguere tra scienze formali o esatte e scienze sperimentali; le prime riguardano enti astratti, le seconde fenomeni del mondo esterno. La geometria appare quindi essere una scienza «mista», costituita a partire da premesse empiriche (*gli assiomi*), frutto dell'osservazione degli oggetti del mondo esterno, e da *postulati o ipotesi*, ossia da premesse semi-empiriche che hanno origine nell'osservazione empirica ma descrivono oggetti che sfuggono al campo dell'esperienza, o da premesse astratte, relative ad oggetti che fuoriescono dal campo dell'esperienza, ma che tuttavia non devono essere in contraddizione con gli assiomi empirici.

Contrariamente a quanto andava affermando Peano, «la questione non consiste tanto nel dare un minor numero di postulati quanto nel dare dei postulati semplici indipendenti e sufficienti» scriverà Veronese (1893-1894, 196) qualche anno dopo. E d'altra parte, «*condizione essenziale della geometria è l'intuizione spaziale*». Dunque, secondo Veronese, «*i postulati geometrici devono esprimere proprietà intuitive o tali che non contraddicano logicamente a quelle intuitive necessarie a definire la forma corrispondente al campo della nostra osservazione esterna*».

Veronese sembra dunque muoversi sul difficile crinale che porta dalle concezioni di Klein all'assiomatica di Hilbert, prendendo al tempo stesso le distanze dal «signicismo» — come egli chiama il simbolismo peaniano (Brigaglia [1994, 240], Cantù [1999, 192-193]). Infatti, se da un lato egli àncora l'origine degli assiomi geometrici ad un punto di vista empirista, dall'altro si muove in una direzione hilbertiana, affidando l'esistenza di oggetti astratti alla coerenza con gli assiomi empirici. Così, dopo essersi dichiarato «pienamente d'accordo» con le affermazioni di Klein (1890b, 381) intorno alla natura degli assiomi, che cita parola per parola, Veronese aggiunge: «Io mi esprimo invece dicendo che gli assiomi sono il risultato dell'intuizione e dell'astrazione insieme, che così sono formati gli oggetti geometrici, i quali non chiamiamo comunemente astratti ma intuitivi, dando la prevalenza all'intuizione» (Veronese 1891, 586).

Come aveva detto Klein, anche per Veronese «ogni considerazione geometrica si deve interpretare nel senso che in essa si debba avere sempre la figura dinanzi agli occhi» (Veronese 1891, 612). D'altra parte, la costruzione di Veronese degli iperspazi si fonda sul concetto di «spazio generale», che «è dato da un sistema di punti tale che, data o costruita una figura qualunque, vi è almeno un punto fuori di essa le cui proprietà non dimostrabili derivano in parte dall'osservazione esterna ed in parte da principi astratti che non contraddicono alle prime» (Veronese 1891, 211).

Da qui discende la concezione «genetica» degli iperspazi, pensati generati a partire da S_3, che Veronese ribadisce nei *Fondamenti di geometria*: «Dato lo spazio S_3, e un punto fuori di esso costruiamo lo spazio S_4, così analogamente lo spazio S_n assoggettandolo agli assiomi dello spazio generale» (Veronese 1891, 611). In tali spazi «il punto non è un sistema di numeri, né un oggetto qualsiasi, ma il punto tale e quale ce lo immaginiamo nello spazio ordinario; e gli oggetti composti di punti sono oggetti (figure) a cui applichiamo continuamente l'intuizione spaziale combinata con l'astrazione, e quindi col metodo sintetico».

Ma con ciò, aveva obiettato Segre, «mi pare che, mentre scema quella gran fecondità della geometria a più dimensioni, a cui ho accennato, si va incontro all'obbiezione che il punto, quale si concepisce nel nostro spazio, e appunto pel modo con cui lo concepiamo, non è più concepibile fuori di esso, ove potrebbe anche non esistere». Si capisce quindi il dissenso di Segre e il suo interesse per la chiarificazione della struttura assiomatica della geometria proiettiva del piano e dello spazio secondo le idee di von Staudt e di Klein, e poi la sua estensione alla geometria proiettiva negli iperspazi.

L'obiezione annunciata da Segre sarà resa esplicita da Peano: i punti in un iperspazio non si possono considerare «tali e quali ce li immaginiamo nello spazio ordinario» come pretende Veronese. Peano stesso aveva mostrato ne *I Principii* che per passare da due a tre dimensioni occorre un opportuno assioma. Analogamente accade per le dimensioni superiori. La «lettera aperta» indirizzata da Peano (1891e) a Veronese offre a quest'ultimo l'occasione per ribadire che «tutto l'insieme di punti, che secondo gli assiomi dati possiamo immaginare tali e quali ce li rappresentiamo nello spazio ordinario, è lo spazio generale» a un numero infinito attuale di dimensioni e «considerato come già costruito o dato» (Veronese 1892, 43).

La polemica si chiude con la recensione di Peano dei *Fondamenti di geometria*, che mette in luce l'assurdità logica insita nel «principio fondamentale» sul quale Veronese appoggia la sua definizione di spazio generale, alla base della sua concezione «genetica» degli iperspazi. «Mentre la teoria analitica di questi spazii non presenta difficoltà di sorta, riducendosi allora questa teoria ad un cambiamento di nomi di enti algebrici», osserva Peano, «la teoria geometrica o sintetica, ove si considerino i punti dell'iperspazio tali e quali quelli dello spazio ordinario, dà luogo a difficoltà, esigendosi allora un numero di postulati maggiore di quelli richiesti per la geometria ordinaria».

Come scrive in maniera esplicita a Federico Amodeo nel marzo 1891, «la geometria a più dimensioni ha bel dire che non è necessario fissare di quale definizione si valga; essa non può scappare dalle due corna del dilemma, — o procede per via sintetica, e va nell'assurdo; o per via analitica, e percorre una strada battuta» (in: Palladino 2000, 83). Dopo aver rinviato proprio all'articolo di Amodeo (1891) per una trattazione della questione «in modo chiaro e rigoroso», Peano così conclude la recensione del libro di Veronese: «si potrebbe lungamente continuare l'enumerazione degli assurdi che l'A. ha accatastato. Ma questi errori, la mancanza di precisione e rigore in tutto il libro tolgono ad esso ogni valore» (Peano 1892a, 143).

Pur nella radicale diversità dei toni, le critiche di Peano alla definizione di Veronese degli iperspazi sono condivise da Segre, che infatti considera «legittima» l'obiezione mossa da Peano, mentre a suo avviso quell'obiezione «si toglie» se gli iperspazi si definiscono ricorrendo alle altre due definizioni che lo stesso Segre aveva ricordato. Le idee di Peano e Segre divergono invece sul modo di trattare gli iperspazi. Mentre Segre rivendica la fecondità dei metodi sintetici di Veronese in geometria iperspaziale, Peano dissente energicamente dall'affermazione (di Segre, ma ispirata a Veronese), che si possano utilizzare gli iperspazi per fare della geometria nello spazio ordinario a tre dimensioni. Per Peano gli iperspazi non sono altro che varietà n-dimensionali, insiemi di n-ple di numeri, da studiare con le tecniche dell'algebra lineare.

Un teorema vero in un tale spazio, afferma Peano (1891b, 68) dipende anche da un assioma che afferma appunto che lo spazio ha n dimensioni. Se si considera in particolare lo spazio a quattro dimensioni, «ne risulta come conseguenza che per questa via ogni proposizione dimostrata vera servendosi dello spazio a quattro dimensioni cessa di valere nello spazio a tre» (Peano 1891b, 68). Tuttavia, ha ragione Bozzi (2000, 104) ad osservare che qui Peano si sbaglia clamorosamente. Infatti, dal fatto che una certa proposizione è vera nello spazio a quattro dimensioni non si può concludere che sarà vera in quello a tre, «ma certo non che sarà falsa (cioè che cessa di esser vera, come dice Peano)». A meno di supporre che il sistema di assiomi della geometria dello spazio a quattro (o, in generale, a n) dimensioni sia completo. E questo, osserva Bozzi «significa assimilare la verità nel modello (lo spazio ad un dato numero di dimensioni) alla dimostrabilità entro la teoria di questi spazi».

È vero che «tale assimilazione non è teorizzata direttamente da Peano», aggiunge Bozzi, «ma è naturale conseguenza della sua incapacità di dare autonome definizioni di teoria e interpretazione» e quindi di affrontare i problemi che si presentano quando un modello di una teoria T si immerge in un modello di una teoria T'. È quanto accade comunemente in geometria, quando si considerano per esempio i piani immersi nello spazio a tre dimensioni, o quando si utilizza la teoria della retta, del piano e dello spazio ordinari per gli spazi lineari ad 1, 2, 3 dimensioni contenuti nello spazio lineare ad n dimensioni, come aveva fatto Segre fin dalla sua tesi.

Di fatto, Peano identifica teorie e interpretazioni. Come scrive ad Amodeo nel marzo 1891, «a differenza delle due dimensioni, le tre dimensioni bastano a loro stesse, e non hanno bisogno della quarta» (in Palladino 2000, 83). Ecco perché nel corso della polemica egli obietta a Segre che la natura spaziale del teorema di Desargues («un teorema di Geometria solida») mostra che è sbagliato parlare di geometria del piano quando ci si occupa di figure su un piano.

La distinzione tra modelli e teorie è invece all'opera nei *GG*. Hilbert ne dà uno splendido esempio proprio con il teorema di Desargues, quando dimostra (*GG*, Teor. 56) che la validità di quel teorema è condizione necessaria e sufficiente affinché una geometria piana (in cui sono soddisfatti gli assiomi della retta, dell'ordinamento e delle parallele) possa essere considerata come parte di una geometria dello spazio in cui quegli assiomi continuano a valere. Questo risultato, osserva Hilbert, permette di riconoscere che ogni geometria in cui sono soddisfatti quegli assiomi può essere considerata parte di una «geometria multidimensionale».

Insieme ai fondamenti della geometria degli iperspazi, la polemica di Peano con Veronese riguarda anche l'esistenza di segmenti infinitesimi. Il contributo più noto del volume di Veronese consiste nell'analisi di un continuo non archimedeo, e nella possibilità di considerare una geometria non archimedea. Questo è l'aspetto che Hilbert ha in mente quando nei *GG* parla del «profondo lavoro» di Veronese, che egli conosce in traduzione tedesca (Hilbert 1899, 48). Ma prima della pubblicazione dei *GG*, che sanciscono definitiva legittimità alla geometria non archimedea — una tra le possibili geometrie-*non* (non-arguesiana, non-pascaliana, non-legedriana e così via) che si moltiplicano nelle pagine di Hilbert — la proposta di Veronese alimenta reazioni polemiche non solo da parte di Peano. La breve nota (Peano 1892b) sull'impossibilità di esistenza di segmenti infinitesimi attuali si inserisce infatti in una discussione più ampia e vivace che coinvolge su posizioni diverse Cantor, Vivanti, Bettazzi e Levi-Civita oltre che, naturalmente, lo stesso Veronese (Geminiani 1993).

4. – I lavori dei «giovani studenti».

Il volume di Veronese (1891) appare quando è ormai in stampa un lavoro di Fano che, insieme ad un contemporaneo articolo di Amodeo (1891), raccoglie l'invito fatto a lezione da Segre di fornire una trattazione assiomatica della geometria proiettiva negli iperspazi. Contrariamente a Fano, Amodeo non si può certo annoverare tra i «giovani studenti» di Segre, anche se ne segue le lezioni quando giunge a Torino nel dicembre 1890 come vincitore di concorso a professore del locale Istituto Tecnico, e il suo articolo ne rivela l'influenza.

Tuttavia, più che con Segre, nel suo breve soggiorno torinese (vi resta fino al successivo anno scolastico) Amodeo stringe una duratura amicizia con Peano, al quale nel marzo 1891 sottopone una prima stesura del proprio lavoro. Nelle lettere scambiate tra i due emergono diversi punti di dissenso. «La più notevole diversità di modo di vedere» tra Peano «e tanti altri — te compreso», riguarda ancora una volta il modo di intendere le varietà lineari a più dimensioni, dichiara Peano. «Io, confesso la mia ignoranza, non conosco altro procedimento che quello delle coordinate e delle equazioni» (in: Palladino 2000, 83). Ecco perché i postulati con cui Amodeo caratterizza gli iperspazi, a cominciare da S_4 — «Fuori dell'S_3 esiste ancora un punto» (Amodeo 1891, 748) — sono per Peano «inutili». I risultati che Amodeo ottiene a partire da essi «sono allora proposizioni su sistemi di equazioni lineari; e — conclude Peano — parmi più chiaro l'antico procedimento per ottenerli, nel quale, in fin dei conti si sa su che cosa si ragiona». Ribadendo l'opinione che «in geometria proiettiva uno spazio non è necessariamente il solo spazio dei punti ordinari» nella risposta Amodeo riprende nella sostanza gli argomenti di Segre sulla fecondità, la semplicità e la potenza dei metodi di geometria iperspaziale che consentono di vedere «da un unico punto di vista tante diverse disparate questioni» (in: Palladino 2000, 87). Tutto ciò, insieme al rifiuto di Amodeo a ricorrere al simbolismo peaniano, contribuisce forse a spiegare perché quel lavoro appaia negli Atti dell'Accademia di Torino e non nella «Rivista di Matematica» di Peano.

Come aveva fatto Amodeo, anche Fano si richiama apertamente a Segre in apertura del suo lavoro. Infatti, quando scrive che «A base del nostro studio noi mettiamo una *varietà* qualsiasi di enti di qualunque natura, enti che chiameremo, per brevità, *punti* indipendentemente però, beninteso, dalla loro stessa natura», Fano (1892, 108-109) ha in mente non tanto l'analoga affermazione fatta da Peano (1889b, 77) ne *I Principii* quanto le osservazioni fatte da Segre (1891) sulle tecniche di uso corrente in geometria proiettiva iperspaziale.

Fano introduce poi con un postulato la retta passante per due punti, definisce il piano come «l'insieme di tutti i punti contenuti nelle rette che congiungono i singoli punti di una retta data con un punto fisso ed assegnato ad arbitrio fuori dalla retta stessa» (Fano 1892, 109) ossia è ottenuto proiettando i punti della retta da questo punto fisso, e infine postula che la retta determinata da due punti di un piano sta tutta nel piano e che due rette di uno stesso piano hanno sempre un punto in comune. Stabilite le proprietà del piano, i successivi spazi S_3, S_4, …, S_r si possono ottenere ciascuno «come proiezione del precedente da un punto esterno ad esso» come in fondo aveva fatto Veronese «il tutto senza che occorra alcun nuovo postulato» osserva Fano (1892, 111), che si limita a rinviare al lavoro di Amodeo (1981) per i dettagli.

Come aveva obiettato a Veronese, in una lettera a Amodeo del 18 luglio 1892 Peano obietta che anche in Fano «manca il postulato, esplicitamente enunciato, che $r \geqslant 3$» (in: Palladino 2000, 95). «Anche la definizione del piano» data da Fano, aggiunge Peano, «ha questo inconveniente: è falsa se alle parole punto e piano attribuiamo loro il significato che hanno nella geometria d'Euclide. Quest'inconveniente può parere più o meno grave a seconda del punto di vista in cui ci si mette».

Il punto di vista in cui si mette Fano è quello proiettivo, e un passo fondamentale nella sua costruzione è l'esistenza del quarto armonico. Egli se ne serve per definire il concetto di «sistema armonico» e di «serie armonica» e introdurre poi con opportuni assiomi l'ordine naturale (o meglio, gli ordini — uno inverso dell'altro) su una retta e infine le coordinate su una retta (e poi nel piano e negli iperspazi) seguendo la via che era stata indicata da De Paolis (1881), «salvo alcune modificazioni» dovute essenzialmente al fatto che De Paolis si limitava allo spazio proiettivo ordinario (cfr. Avellone Brigaglia Zappulla 2001) mentre Fano ha in vista «un ordine di idee più generale».

A questo proposito Peano fa osservare a Amodeo che parole come «ordine», e espressioni come «partire da punto, ritornare allo stesso punto dopo aver percorso tutta la serie di punti della retta» nel lavoro di Fano «non sono definite, né paiomi definibili senza ricorrere all'intuizione». Che, insomma, c'è implicito in Fano il ricorso a «un nuovo concetto, quello di *verso* di una retta, concetto non definito, ma determinato mediante postulati» (in: Palladino 2000, 95). L'analisi logica di Peano è ancora una volta indirizzata verso la ricerca del minor numero di concetti primitivi e di assiomi. Dopo aver rimproverato a Fano di non enumerare *tutti* i postulati di cui si serve, Peano conclude che per Fano i concetti fondamentali non definiti sono tre, *punto*, *retta* e *verso*; «io invece feci vedere che con due soli, *punto* e *segmento*, si costruisce la geometria».

Per dimostrare l'indipendenza dei postulati via via introdotti, in quel lavoro Fano si serve in maniera sistematica di esempi divenuti celebri. Lo scopo è diverso, ma la tecnica è la stessa che abbiamo visto all'opera in Peano, e che — apparentemente all'oscuro dei lavori di Fano e di Peano — Hilbert adotterà in maniera altrettanto sistematica nei *GG*. Così, per esempio, definito il concetto di gruppo armonico su una forma semplice fondamentale (una retta punteggiata o un fascio) Fano mostra che quarto armonico di tre elementi ABC o è per tutte le terne di elementi distinti un quarto elemento D distinto da essi oppure, per tutte le terne, coincide con C. La dimostrazione che quest'ultima possibilità è indipendente dai postulati enunciati è data dalla costruzione del celebre esempio di piano di 7 punti e 7 rette, che proiettato da un punto esterno ad esso dà luogo ad una configurazione spaziale di 15 punti, 15 piani e 35 rette. L'ipotesi che $C = D$ è esclusa da un nuovo postulato: «esiste un gruppo armonico $ABCD$ costituito da quattro elementi distinti» (Fano 1892, 115).

Analogamente, dati quattro punti allineati e distinti $ABCD$, Fano dimostra che è possibile che sia la quaterna data sia la quaterna AD-

BC siano entrambe armoniche, costruendo una configurazione di 13 punti e 13 rette per cui sono verificati tutti i postulati relativi al piano: «su ogni retta stanno 4 punti, per ogni punto passano 4 rette; gli uni e le altre, considerati in un ordine qualsiasi, formano sempre un gruppo armonico» (Fano 1892, 116). Da qui l'introduzione di un nuovo postulato per escludere questa possibilità.

Fano è ben consapevole che i suoi postulati consentono solo di dedurre l'esistenza di punti razionali sulla retta (nel piano, o in generale in S_r), e che per l'esistenza di altri punti (irrazionali) «le cose dette ci autorizzano ad introdurre un nuovo postulato ad essi relativo» (Fano 1892, 130). Egli si limita tuttavia a rinviare al lavoro di Amodeo, osservando che i punti irrazionali si potrebbero anche introdurre con una definizione «la quale estendesse opportunamente il concetto di punto». Analogamente, conclude Fano, si potrebbe fare per i punti immaginari, seguendo la via indicata a suo tempo da von Staudt.

Nello stesso anno in cui appare il lavoro di Fano, il problema della ricerca del «minimo di convenzioni e postulati» (e di conseguenza la questione dell'indipendenza degli assiomi) da cui dedurre «[i] principi e [le] proposizioni fondamentali» della geometria della retta (esclusa la continuità) viene affrontato da Giovanni Vailati, un altro giovane che gravita intorno alla figura di Peano. La tecnica adottata da Vailati si basa sull'ordinamento dei punti della retta, espresso da tre proprietà primitive che caratterizzano la relazione binaria «*segue a*» definita tra gli enti *a, b, c*, ... di un sistema astratto. Dalla relazione «*b* segue *a*» Vailati (1892, 10) riesce a ottenere la relazione ternaria «*c* giace tra *a* e *b*» e le sue proprietà. Attraverso questo «processo di riduzione» Vailati ricava poi sette degli undici assiomi per la retta enunciati da Peano ne *I Principii* (da questo punto di vista, osserva Vailati, gli altri quattro si rivelano non essere necessari). «Ma questa riduzione non è applicabile ai punti dello spazio», osserva Peano (1894a, 127) quando nel 1894 ritorna sulla questione dell'indipendenza degli assiomi, che ne *I Principii* aveva ritenuto di risolvere facendo appello all'ordine in cui essi sono enunciati.

Come aveva esibito concretamente Fano, anche secondo Peano «si puo' provare l'indipendenza di alcuni postulati da altri mediante esempi». Allo scopo, egli attribuisce ai segni non definiti, che qui sono 1 e $c \in ab$, «dei significati affatto qualunque; e se si trova che i segni fondamentali, in questo nuovo significato, soddisfano ad un gruppo di proposizioni primitive, e non a tutte, si dedurrà che queste non sono conseguenze necessarie di quelle» (Peano 1894a, 127). Quindi «per provare l'indipendenza di n postulati bisognerebbe portare n esempi di interpretazione dei segni non definiti, ciascuno dei quali soddisfi a $n-1$ postulati, e non al rimanente». Se in questo modo egli era riuscito a dimostrare l'indipendenza dei propri assiomi per i numeri naturali (Peano 1891c, 87), «qui invece siamo ben lungi dall'avere completata questa prova» riconosce Peano (1894a, 127). Egli fornisce alcuni esempi di interpretazione degli assiomi della retta, ma conclude che «in questo istante noi possiamo solamente affermare che non si sanno scomporre le proposizioni assunte per postulati in altre più semplici; né si è provata la loro indipendenza» (Peano 1894a, 129).

Nell'ultima parte di questo lavoro Peano introduce la geometria metrica, in cui compare il concetto di figure congruenti, definisce gli assiomi del "moto» e, attraverso di esso, introduce la simmetria assiale, le traslazioni e le rotazioni. L'intento pedagogico di Peano è chiaro: la fiducia che «alcune delle osservazioni fatte possano essere utili per la pubblicazione di trattati elementari» si accompagna alla speranza che il suo lavoro possa contribuire a «rendere più esatte le definizioni e le dimostrazioni di Geometria elementare» (Peano 1894a, 157).

Non dissimile è lo spirito con cui Peano nel 1898 sviluppa la teoria dei vettori a partire dalle idee primitive di punto, equidifferenza fra quattro punti (su cui si basa la definizione di vettore) e prodotto scalare di due vettori. «Poiché con questa teoria si può trattare l'intera Geometria, egli osserva, ne deriva la possibilità teorica di sostituire alla Geometria elementare stessa, la teoria dei vettori» (Peano 1898, 187), Questo lavoro viene riprodotto nel tomo IV del *Formulaire Mathématique* apparso nel 1902. Nello stesso anno, in una breve nota Peano (1902) mostra come si possa tradurre nella teoria dei vettori la geometria elementare, che Pieri (1900, 254) aveva affermato potersi basare sulle sole idee primitive di punto e distanza di due punti.

Come avviene per l'aritmetica, anche per i fondamenti della geometria le ricerche di Peano culminano nel *Formulario*, l'impresa che a cavallo del secolo impegna il logico torinese e i suoi allievi, una specie di enciclopedia delle teorie matematiche, espresse nel simbolismo peaniano e nel *latino sine flexione*.

5. – Un giovane d'eccezione: Enriques.

Tra i «giovani geometri italiani» ai quali Segre si era rivolto presentando la traduzione del *Programma di Erlangen*, Federigo Enriques fu certo uno dei più pronti a cogliere le idee contenute in quello scritto e a metterle in pratica nei suoi primi lavori sulle trasformazioni birazionali del piano (Enriques 1893a, 1893b). Alle idee di Klein (e di Segre) si ispira anche il corso di conferenze sulla geometria negli spazi n-dimensionali che egli tiene su richiesta degli studenti. Il piano è delineato in una lettera a Castelnuovo del novembre 1894: le lezioni «s'informerebbero ad un principio generale che completa quello di Klein (Programm) per far rientrare in quell'ordine d'idee vari altri tipi di ricerche (per esempio la geometria sull'ente) che ad esso sfuggono, almeno direttamente» (in: Bottazzini-Conte-Gario 1996, 151) ([6]).

Enriques riprende l'argomento in una successiva lettera all'amico: «Il principio generale di cui ti parlavo, atto a caratterizzare vari tipi di ricerche geom[etriche] che non rientrano immediatamente nell'ordine d'idee di Klein è questo: un gruppo di trasf[ormazioni] in un S_n fissa un ordine di proprietà invariantive in quel gruppo: il gruppo risulta poi determinato (inversamente) dalla nozione di tali proprietà: ma se queste proprietà si pongono soltanto in relazione ad enti particolari esse possono essere mantenute comunque le due fig[ure] non sieno uguali in quella Geom[etria] (cioè trasformabili in una trasf[ormazione] del gruppo). Astraendo dallo spazio e fissando la nozione delle proprietà del gruppo relativamente ad un ente particolare, si ottiene una Geom[etria] di quell'ente. Un es[empio] ovvio è la Geom[etria] sopra l'ente algebrico» (*Riposte armonie*, 153-154).

([6]) Per brevità citato nel seguito come *Riposte armonie*.

Enriques continua accennando ad altri esempi, che riprende e sviluppa nelle *Conferenze di geometria* (Enriques 1894-95). Il volume litografato raccoglie solo il Cap. 1°, «Fondamenti di una geometria iperspaziale» e dal nostro punto di vista è un testo del massimo interesse. Enriques comincia coll'affermare che «la Geometria ha per oggetto lo studio delle relazioni inerenti al concetto di spazio quale esso scaturisce nella nostra mente dall'ordine della sensibilità esterna, ossia quale ci è presentato dall'intuizione» (Enriques 1894-95, 2).

Come aveva detto Peano, anche secondo Enriques «vi è dell'arbitrario nella scelta degli enti fondamentali dello spazio», tra i quali intercorrono delle relazioni «date *a priori* come postulati». Questi ultimi «vengono desunti dall'intuizione ed il loro complesso tien luogo di definizione per gli enti fondamentali», definisce cioè in maniera implicita gli enti fondamentali «stabilendo quei mutui rapporti di essi che servono a fissarli per quanto occorre agli sviluppi geometrici» (Enriques 1894-95, 3). Per chi ha letto le *Conferenze* di Enriques, Hilbert non dice nulla di nuovo quando in apertura dei *GG* afferma che «la descrizione esatta e adatta agli scopi della matematica» delle mutue relazioni tra gli oggetti dei suoi sistemi sono stabilite dagli assiomi.

Agli occhi di Enriques la geometria appare dunque «nel suo principio e nel suo svolgimento» come scienza «soggettiva», giacché i postulati riflettono il concetto di «spazio intuitivo» presente nella nostra mente, le definizioni e le dimostrazioni «sono soltanto operazioni logiche». Se a questo «spazio intuitivo» corrisponda uno spazio «reale», è questione filosofica «strettamente legata al problema della conoscenza», che Enriques qui solo accenna, ma che diventerà dominante nei suoi interessi nel giro di pochi anni. Lo sviluppo della geometria è comunque indipendente dal suo rapporto con la realtà esterna. La distinzione tra geometria «fisica» e quella «soggettiva» consente secondo Enriques di fondare varie geometrie «più generali», nelle quali si prescinde da qualche postulato, attraverso un'analisi dei postulati condotta seguendo a) il criterio «fisico» b) il criterio «fisico-psicologico» e infine c) il criterio «logico». Enriques privilegia gli ultimi due criteri, che si basano sull'intuizione e sulla logica, giacché basarsi sulla logica soltanto «come opinano alcuni» finirebbe per ridurre «la matematica ad una semplice esercitazione sillogistica».

Il fatto che i postulati della geometria siano «desunti dall'intuizione» consente a Enriques di affermare a priori che essi sono compatibili tra loro sulla base del «principio di ragione», secondo il quale «più verità concepite insieme come elementi di uno stesso concetto sono compatibili». Quanto alla loro indipendenza, Enriques ne riconosce il significato sia nell'ordine in cui i postulati sono enunciati (come aveva detto Peano) sia nella loro composizione (un postulato può «scindersi in altri qualcuno dei quali si deduca dai precedenti»).

L'interesse di Enriques è rivolto alla geometria «astratta» che «*si può interpretare in infiniti modi come una Geometria concreta (intuitiva) fissando la natura dei suoi elementi*» (1894, 9-10). Così per esempio la geometria piana astratta si può «interpretare indifferentemente come la geometria intuitiva sul piano o come quella sopra le superficie sviluppabili» e la geometria proiettiva astratta dello spazio si può interpretare come una geometria dei sistemi lineari ∞ di curve piane algebriche di dato ordine, o come una geometria delle involuzioni di ordine $n > 2$ e di 3a specie sulla retta (Enriques 1894, 15). Analogamente, la «geometria astratta degli iperspazi riceverà così un'infinità di svariate interpretazioni».

Per quanto riguarda l'introduzione dei postulati della geometria iperspaziale, Enriques (1894-95, 87-98) si riferisce ai lavori di Veronese, Amodeo e Fano e richiama esplicitamente il proprio articolo (Enriques 1894) in cui il postulato della continuità è introdotto «sotto forma intuitiva grafica». Come ricordava Castelnuovo (1947, xiii), infatti, cominciando dallo stesso anno ad insegnare la geometria proiettiva Enriques «si avvide che nei fondamenti di quel ramo di geometria [...] sussisteva una lacuna» che riguardava la dimostrazione del teorema fondamentale della proiettività (di von Staudt). «A fondamento della geometria proiettiva stanno due ordini di concetti, cui si collegano due gruppi di postulati», affermava Enriques (1894, 141). Il primo gruppo riguarda i postulati della geometria di posizione, «ampiamente discussi» da Pasch e Peano nel caso del piano e dello spazio ordinario S_3, da Veronese, Fano e Amodeo per gli iperspazi S_r. Tali postulati consentono di stabilire teoremi come quello di Desargues (quando $r \geqslant 3$) o di parlare di gruppi armonici e delle loro proprietà.

Ma per stabilire il teorema fondamentale della proiettività, ossia per introdurre le coordinate proiettive senza far ricorso a concetti metrici, occorre far riferimento ad un diverso ordine di concetti che, afferma Enriques (1894, 141), «si deve considerare come il fondamento di una *teoria della connessione* intesa in un senso più generale». A differenza di Fano e Amodeo, l'intento di Enriques è di «stabilire i postulati desunti dall'intuizione sperimentale dello spazio che si presentano più semplici per definire l'oggetto della geometria proiettiva». E in una nota posta a commento della sua affermazione ribadiva: «Non intendiamo per altro di introdurre di quei concetti intuitivi niente più che le loro relazioni logiche, sicché la geometria così fondata può ancora ricevere una infinità di interpretazioni ove all'elemento «punto» di essa si attribuisca un arbitrario significato. Ci sembra soltanto che l'origine sperimentale della geometria non debba essere dimenticata nella ricerca delle ipotesi su cui essa è fondata» (Enriques 1894, 142).

Come nelle *Conferenze di geometria*, sono qui evidenti le tracce sia delle concezioni empiriche di Pasch, Peano e Klein, sia delle preoccupazioni di Segre di mantenere la più ampia libertà d'interpretazione degli enti fondamentali. Nella *Corrispondenza* con Fano [Enriques-Fano] che fa seguito a questo articolo, Enriques ribadisce che nello stabilire i propri postulati egli ha inteso «seguire la via indicata dall'intuizione sperimentale». O meglio, come dirà qualche anno dopo, «contemperare le esigenze dello spirito logico coi vantaggi e colle attrattive che l'intuizione conferisce agli studi geometrici» (Enriques 1898a, v). Da parte sua, Fano è pronto a riconoscere che i suoi postulati «conducono soltanto a una *geometria proiettiva lineare*, e a uno spazio (di punti razionali) che ancora non corrisponde del tutto a ciò che i sensi ci dicono (*o a quello che noi crediamo ci dicano* [sott. U.B.])». Il passo che resta da compiere, concorda Fano, è appunto colmare la «lacuna» segnalata da Enriques.

Richiamate le nozioni preliminari che consentono di ottenere il teorema di Desargues e definire il concetto di gruppo armonico per una forma di prima specie, Enriques (1894, 144) dimostra che «se due forme di prima specie sono proiettive, ad ogni gruppo armonico dell'una corrisponde un gruppo armonico dell'altra». La dimostrazione del teorema inverso dipende tuttavia dalla dimostrazione del teorema (di von Staudt) che «una corrispondenza biunivoca armonica tra due forme di prima specie sovrapposte, avente tre elementi *uniti* (coincidenti con gli omologhi) è *identica*». Da qui discende infatti l'esistenza e l'unicità di tale corrispondenza.

Enriques introduce un postulato per stabilire un ordine su una forma di prima specie e definisce il senso di una disposizione circolare della forma e le relative proprietà. Ma il punto cruciale preliminare alla dimostrazione del teorema di von Staudt — la «lacuna» rilevata da Enriques — è la necessità di un postulato di continuità (equivalente a quello di Dedekind ma indipendente da ogni determinazione metrica) che Enriques (1894, 151) enuncia per una forma di prima specie (una retta). Se un segmento ordinato AB di una tale forma è diviso in due parti tali che 1) ogni punto del segmento appartiene a una delle due parti, 2) l'estremo A appartiene alla prima parte e B alla seconda, 3) ogni elemento della prima parte precede ogni elemento della seconda, allora esiste *un* elemento C del segmento AB tale che ogni elemento (se esiste) di AB che precede C appartiene alla prima parte e ogni elemento (se esiste) di AB che segue C appartiene alla seconda. La dimostrazione del teorema di von Staudt segue poi per assurdo. Il contenuto di questo lavoro sarà in seguito ripreso da Enriques nelle sue *Lezioni di geometria proiettiva* (1898a, 75-95).

6. – La geometria come sistema logico-deduttivo.

Lo stesso obiettivo di Enriques è perseguito da Pieri in tre successive *Note* apparse tra il 1895 e il 1896. A differenza di Enriques e di Fano, Pieri non è un «giovane studente». Quando comincia ad occuparsi di fondamenti è professore di geometria proiettiva all'Accademia Militare di Torino e può vantare una trentina di lavori di geometria algebrica. Rispetto all'articolo di Enriques, la trattazione di Pieri (1894-95) ha un carattere ben altrimenti sistematico. Nell'enunciare postulati e teoremi egli si serve della «nuova Arte Logica» introdotta da Peano, verso i cui *Principii* si dichiara debitore «di molti ammaestramenti». Nella prima *Nota* Pieri (1894-95, 13) propone un sistema di 19 postulati per la geometria proiettiva intesa come «una scienza deduttiva indipendente da ogni altro corpo di dottrine matematiche o fisiche (e in particolare dagli Assiomi od ipotesi della Geometria elementare)», basata sui concetti primitivi di punto, retta e segmento proiettivi e «governata in ogni sua parte» dal principio di proiezione e dalla dualità.

Dopo aver introdotto i postulati per la retta e il piano proiettivi, il postulato IX («se π è un piano proiettivo, fuori di esso giace almeno un punto») consente a Pieri di affermare che ciò basterebbe a dimostrare il teorema di Desargues — senza ricorso ad alcun assioma di continuità, è implicito qui in Pieri come era in Peano (1889b) — mentre il postulato seguente («una retta proiettiva e un piano proiettivo hanno sempre almeno un punto in comune») permette di stabilire la dualità tra la classe dei punti proiettivi e dei piani proiettivi, entrambe varietà a tre dimensioni. Infine, per stabilire il teorema fondamentale di von Staudt Pieri ricorre al concetto primitivo di segmento proiettivo individuato da tre punti, che gli consente di definire l'ordine naturale e il senso di una retta seguendo una via diversa da quella di Enriques, mentre la continuità è introdotta da Pieri (1894-95, 45-46) con un postulato del tutto analogo a quello enunciato da Enriques (1894, 151). Alle successive *Note* II, III (Pieri 1895-96) è affidato lo studio delle proprietà dei gruppi armonici, il teorema di von Staudt e la costruzione della «pura» geometria di posizione.

Adottando lo stesso punto di vista «puramente *deduttivo* ed *astratto*», nel febbraio del 1896 Pieri (1896-1899) ritorna sulla questione dell'assiomatizzazione della geometria proiettiva negli iperspazi, ancora un «soggetto di controversia per molti». Egli presenta un sistema di postulati che, unitamente agli assiomi della logica, sono sufficienti «a sostenere l'intero edifizio della geometria proiettiva astratta», ma non si spinge a discutere questioni di indipendenza e irriducibilità dei postulati, «condizioni queste, che toccano quasi alla perfezione ideale» (Pieri 1896-1899, 84).

Pieri prende le mosse dal simbolo [0] («punto proiettivo» o «classe dei punti proiettivi»), un ente non definito o, come si era espresso Burali-Forti (1894, 129), «definito in se stesso da tutte quelle proprietà che gli verranno attribuite man mano» dai postulati. Introdotti con dieci postulati la retta e il piano proiettivi, Pieri osserva che ulteriori tre postulati — oltre ai 9 relativi al segmento proiettivo, tra i quali figura anche un postulato di continuità — servono per sviluppare la geometria proiettiva a tre dimensioni. Facendo propria la posizione tante volte ribadita da Peano, Pieri afferma che per la geometria proiettiva negli spazi ad n dimensioni sono dunque sufficienti $10 + n + 9$ ossia $19 + n$ postulati. Il principio d'induzione completa su n consente poi di «protrarre *in infinito*» la successione di tali spazi, ricorrendo ad un numero finito di definizioni e postulati (o meglio, ad una *definizione induttiva di 2a specie*, come dice Pieri (1896-99, 88).

«Avanzando di un tratto ragguardevole nell'analisi» dei principi della geometria proiettiva, qualche mese più tardi Pieri pubblica una breve nota per mostrare la possibilità di fondare la «pura» geometria di posizione — e dunque anche le geometrie metriche che ne derivano, come aveva a suo tempo mostrato Klein (1871, 1873) — su due soli enti primitivi, il «punto proiettivo» e la «congiungente due punti proiettivi» (Pieri 1896-97, 91). Il sistema di 16 postulati (l'ultimo dei quali è la continuità) proposti da Pieri consente di stabilire il teorema fondamentale della proiettività, e dunque di introdurre coordinate proiettive senza ricorrere a concetti quali l'ordine naturale dei punti di una retta, come aveva fatto Enriques. Ogni enunciato di geometria proiettiva, in ultima analisi, non sarà altro che una combinazione logica dei postulati. Ecco perché, conclude Pieri (1896-97, 99) in questo modo la distinzione tra «proprietà di configurazione» (cioè le proprietà di mutua appartenenza di punti, rette e piani) e «proprietà di connessione» — come Enriques (1894) aveva chiamato le proprietà relative al mutuo separarsi degli elementi fra loro — «non risponde più ad alcuna diversità reale intrinseca».

Pieri (1898) ritornerà sulla questione per presentare un «nuovo modo» di introdurre la geometria proiettiva, sottolineando in particolare che «il corpo di dottrine» così introdotto «sarebbe dunque una Geom[etria] proj[ettiva] indipendente dalla continuità o discontinuità della retta» (1898, 179). La distinzione fra punti razionali e irrazionali, osserva Pieri, non occorre se non «per rappresentare la retta projettiva sul continuo numerico reale (ordinario)», rappresentazione che «si manifesta come superflua e quasi straniera agli uffici essenziali della Geometria di posizione» (Pieri 1898, 166).

L'ampia memoria in cui, nell'ottobre del 1897, Pieri raccoglie e ordina i risultati delle sue ricerche «in un tutto più coerente ed organico» non contiene risultati essenzialmente nuovi. Pur riconoscendo «l'utilità di un buon algoritmo ideografico» quale è quello di Peano, per far conoscere i suoi risultati a un maggior numero di studiosi Pieri rinuncia al simbolismo peaniano e si attiene «alle consuete forme del dire», il linguaggio naturale insomma. Nel marzo dello stesso anno Pieri aveva proposto a Klein di presentare i risultati delle proprie ricerche in un articolo per i «Mathematische Annalen». Nella risposta Klein chiedeva a Pieri se non fosse possibile «esprimere il corso dei suoi pensieri in un linguaggio semplice senza i simboli di Peano» (in: Arrighi 1997, 72). «La mia generale esperienza, continuava Klein, indica infatti che lavori scritti in questo simbolismo non trovano in ogni caso lettori in Germania, anzi vanno incontro a priori ad un rifiuto». Per Klein non si trattava di mettere in discussione «il principio di questo simbolismo», che poteva essere importante per il ricercatore nel raggruppare i propri risultati. Tuttavia, osservava Klein, «dovrebbe essere possibile esprimere in linguaggio ordinario» i risultati ottenuti insieme alle riflessioni che portano ad essi. Visibilmente, Pieri fece propria la raccomandazione di Klein, anche se la proposta di articolo non ebbe seguito.

Nel motivare le sue ricerche Pieri (1897-1898, 102) prendeva le distanze dalla concezione empirista di Pasch per affermare «un più moderno criterio», che conduce ad una geometria proiettiva «in tutto speculativa e astratta, i cui soggetti sono mere creazioni del nostro spirito, e semplici atti della nostra volontà i postulati», in una parola, «arbitrari gli uni e gli altri». La geometria proiettiva è per Pieri una «scienza *ipotetica*», del tutto indipendente, nel metodo e nelle premesse, dall'intuizione, e si affida invece «ai canoni del metodo strettamente deduttivo». Ne consegue che «il contenuto ideale delle parole o dei segni, che denotano un qualche soggetto primitivo, è determinato soltanto dalle prop[osizion]i primit[iv]e che versano intorno al medesimo: e il Lettore ha la facoltà di annettere a quelle parole e a que' segni un significato *ad libitum*, purchè questo sia compatibile con gli attributi generici imposti a quell'ente dalle propos[izion]i primit[iv]e» (Pieri 1897-1898, 106). La citazione in nota dell'affermazione di Pasch (1882, 98) riportata sopra (§ 1) non attenua la radicale differenza dei loro punti di vista.

Quanto alla «irreducibilità» del numero dei postulati e alla loro indipendenza, Pieri (1897-1898, 104) ripete quanto aveva detto l'anno prima a proposito del suo sistema di postulati per la geometria degli iperspazi (Pieri 1896-99, 84): si tratta di «condizioni che toccano quasi la perfezione ideale» per le quali nulla può affermare «in modo assoluto». In un Appendice «Sull'indipendenza dei postulati I-XIX» si limita a provare la loro indipendenza «*ordinale*», l'indipendenza cioè di ognuno di essi da quelli che lo precedono, che Peano (1889) aveva dato per evidente.

Nell'aprile del 1899 Pieri pubblica una monografia diventata celebre. L'argomento non è più la geometria proiettiva. Si tratta di una «monografia del punto e del moto», che ha per oggetto la geometria elementare, costruita appunto a partire dalle idee primitive di «punto» e moto». L'intento didattico di questo lavoro è apertamente dichiarato. «Anzi, aggiunge Pieri, l'idea di conferire in qualche maniera all'incremento didattico della Geometria mi consigliò di abbandonare una strada, che nell'ordine speculativo sarebbe forse migliore» (Pieri 1898-99, 185). La strada cioè di definire la congruenza delle figure attraverso nozioni di carattere proiettivo riconducibili a due sole nozioni primitive, come egli stesso aveva mostrato (Pieri 1897-98). Quella strada tuttavia è didatticamente impraticabile, perché porterebbe a premettere l'insegnamento della geometria proiettiva a quello della geometria elementare. È dunque per «tentare eziandio qualche cosa di vantaggioso alla Scuola» che Pieri presenta il suo sistema di assiomi. Il sistema consente di ottenere le proprietà delle figure che sono indipendenti dall'assioma delle parallele, e quindi è «sufficiente allo scopo di certificar che la Geometria elementare si può stabilire comodamente sui venti postulati di questo Saggio, e sull'assioma predetto delle parallele» (Pieri 1898-99, 187).

7. – «Un lavoro interminabile»: i *Prinzipien der Geometrie* di Enriques.

La contemporanea pubblicazione della memoria di Pieri (1897-1898) e delle *Lezioni di geometria proiettiva* (1898a) di Enriques sottolinea il contrasto tra le concezioni dei due. In quel trattato Enriques presenta le idee sulla natura dei principi della geometria che egli era venuto elaborando in quegli anni, di cui si trovano tracce nel carteggio con Castelnuovo.

Nel maggio del 1896 Enriques comincia ad occuparsi di una «questione che dalla matematica prende solo il pretesto: sentendone il nome tu proverai più orrore che stupore», egli confida all'amico. «Si tratta del "problema filosofico dello spazio"» (*Riposte armonie*, 260). «Coloro che fino ad ora si sono occupati della questione — egli aggiunge pochi giorni dopo — hanno avuto secondo me questo torto: di considerare lo spazio come un concetto indivisibile. Come sai io vi distinguo 3 gruppi di nozioni (e relativi postulati) «*connessione, retta, distanza*"» (*Riposte armonie*, 264). E ancora: «Quasi in ogni volume della "Revue philosophique" vi sono lavori sullo spazio: solo alcuni, rarissimi, meritano qualche considerazione; i più si aggirano sull'eterna questione se lo spazio sia dato a priori o no, e non capiscono che si può intendere lo spazio in due modi, "spazio soggettivo" ed "oggettivo" [...] Finalmente ti dirò che discutendo della verità oggettiva dei postulati, e considerandoli come approssimati (in partic[olare] quello che per 2 p[un]ti passa una retta) si viene ad una giustificazione relativa dell'infinitesimo attuale» (*Riposte armonie*, 264).

La geometria, egli scrive nelle *Lezioni*, studia il concetto di spazio «senza porsi il problema (psicologico ma non matematico) della sua genesi» (Enriques 1898a, v). Tuttavia tale problema si presenta nella scelta degli «elementi fondamentali» (punto, retta e piano) che per Enriques è dettata dal criterio di semplicità rispetto all'intuizione psicologica. A chi, come Peano (e Pieri), riteneva che i postulati dovevano essere in minor numero possibile, Enriques obietta che tale criterio «non ha valore imperativo e non soddisfa sempre il senso psicologico dell'intuizione». È quest'ultimo infatti, prima ancora che l'astrattezza o il rigore, il criterio che secondo Enriques deve orientare la ricerca nelle questioni di fondamenti, e la scelta degli elementi fondamentali deve cadere su quelli che hanno «maggior evidenza intuitiva».

La discussione con Castelnuovo si fa più intensa al momento della pubblicazione delle *Lezioni*. Si tratta per esempio di decidere se la dimostrazione del teorema fondamentale della proiettività fra piani (se 4 punti indipendenti sono uniti allora tutti i punti sono uniti) richieda la continuità o no, se il teorema di Pappo (di Pascal, nella terminologia di Hilbert) sia sufficiente o meno per «fondare la Geom[etria] pr[oiettiv]a in tutto il piano (continuo)» (*Riposte armonie*, 357). La risposta viene ben presto dallo stesso Enriques: «Che il teorema di Pappo non basti a stabilire le coordinate *continue* in esso è fuor di questione». Nella stessa occasione egli osserva: «Il teorema dei triangoli omologici sostituisce completamente lo spazio tanto pel piano continuo che pel piano di punti razionali, giacchè allora il piano risulta riferibile omograficamente ad un piano analitico (continuo o di punti razionali) contenuto in uno spazio analitico (a 3 o più dimensioni)» (*Riposte armonie*, 357).

Qualche giorno più tardi, Enriques sottopone all'amico «il dubbio se dato un S_3 non si possa costruire *convenzionalmente* un S_4 che lo contenga riguardando lo S_3 come rappresentazione descrittiva dello S_4 (Veronese), e ciò senza introdurre altri postulati all'infuori di quelli della Geom[etria] di posizione». L'analoga questione si può porre per il piano. Enriques inclina a «credere che dato il teor[ema] dei triangoli omologici si possa considerare un piano descrittivo come rappresentazione di un S_3 contenente il piano stesso. [...] Con ciò si dovrebbe stabilire che il teor[ema] dei triangoli omologici nel piano sostituisce completamente lo S_3, e quindi probabilmente anche che allo S_3 non viene aggiunto nulla dall'esser contenuto in S_4, indipendentemente dalla continuità» (*Riposte armonie*, 359).

Ispirato ad una «filosofia» diametralmente opposta alle vedute di Pieri è anche il progetto di articolo sui «Principi della geometria», l'articolo per l'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* che Enriques è stato invitato a scrivere da Heinrich Burkhardt, dopo che gli aveva spedito copia delle sue *Conferenze* (*Riposte armonie*, 325). La lettura delle lezioni di Klein (1892) suggerisce a Enriques uno schema di articolo che si ispira apertamente delle vedute del geometra di Gottinga: «1) Principi dell'ordinaria Geom[etria] metrica, da Euclide a Legendre, Leibnitz, Bolyai, Lobatschewsky, Veronese. 2) Principi della Geom[etria] pr[oiettiva] e subordinazione della metrica. 3) Il problema dei fondamenti secondo Riemann (ds^2). 4) Il problema gruppale di Helmholtz-Lie» (*Riposte armonie*, 364).

In questo ambito di ricerche la rilettura della memoria di Riemann (1876) suggerisce a Enriques le seguenti osservazioni che egli sottopone a Castelnuovo: «Sai che Riemann genera la sup[erficie] col moto d'una linea l. Considerando le posizioni di l e le traiettorie m dei punti di essa si ottengono così *per dato*, sopra la sup[erficie], due fasci di linee. Ma è facile persuadersi che (se sulle dette linee non vi è alcuna determinazione metrica) non si può dedurre di qui l'esistenza di alcuna altra linea, e tanto meno introdurre sopra la superficie delle coordinate. Qualche post[ulato] esistenziale occorre all'uopo? Io credo di poter stabilire che si possono introdurre le coor[dinate] sulla superficie appena si ammette l'esistenza di un *terzo fascio* di linee sopra la superficie» (*Riposte armonie*, 366).

Quello che Enriques anticipa qui a Castelnuovo è il contenuto essenziale di un articolo (Enriques1898b) in cui egli affronta una questione sollevata anche da Klein (1898). In conclusione di quel lavoro Enriques afferma che il passaggio dal continuo a due dimensioni a quello a tre e più dimensioni «non dà luogo ad osservazioni veramente nuove», giacché i postulati che caratterizzano le superficie «valgono a definire questo continuo».

Nella corrispondenza con Castelnuovo affiorano tracce del «lavoro interminabile» di Enriques per la redazione dell'articolo per *Encyklopädie*. Così per esempio il 28 gennaio 1899 egli scrive all'amico di essersi imbattuto nella «questione se esiste una sup[erficie] dello S_3 ordinario sopra la quale valga la Geometria del piano iperbolico o ellittico completo. In proposito ho avuto una corrispondenza col Bianchi che mi ha fatto rilevare tutta la difficoltà del problema (insoluto), che si riattacca alla questione dei limiti degli integrali delle equazioni a derivate parziali» (*Riposte armonie*, 398). È la questione cui Hilbert darà una risposta negativa, in una nota (Hilbert 1901) riprodotta come appendice ai *GG* a partire dalla seconda edizione.

In quel «lavoro interminabile» Enriques trova in Klein un interlocutore autorevole e prezioso. A lui sottopone il programma dell'articolo durante una sua visita a Bologna alla fine del marzo 1899 («sono stato lieto di vederlo soddisfatto» scrive Enriques a Castelnuovo). A sua volta, Klein suggerisce a Enriques di rivolgersi a Hilbert. «Il prof. Klein, col quale ho avuto la fortuna di trovarmi nei giorni scorsi mi ha incoraggiato a scriverle per domandarle notizia dei più recenti lavori del sig. Minkhowsky [sic] in quanto può interessare i fondamenti della geometria», scrive Enriques a Hilbert il 1 aprile 1899. «Desidererei specialmente di sapere se qualche cosa sia stato da lui pubblicato in relazione alla definizione della lunghezza di una linea come quoziente differenziale di due aree, concetti di cui il sig. Klein mi ha intrattenuto; giacché non vorrei tralasciare di parlarne nel rapporto che sto redigendo per l'Enciclopedia matematica sui Principi della geometria» ([7]).

Enriques si riferisce qui ad un lavoro che Minkowski pubblicherà due anni più tardi. In realtà, data una curva C Minkowski (1901) considera per ogni suo punto una sfera di raggio r fissato. L'insieme di tutti i punti dello spazio, che costituiscono l'interno o il bordo di almeno una di queste sfere definiscono il «dominio di distanza $\leqslant r$» della curva C. Sia $V(r)$ il suo volume, nel caso esista un volume determinato. Minkowski definisce come lunghezza della curva C il lim $V(r)/\pi r^2$ per r che tende a zero (se esiste) e mostra poi che invece di sfere si possono considerare corpi convessi.

Qualche giorno più tardi ad Enriques arriva «la bella offerta di Teubner», l'editore dell'*Encyklopädie*, di scrivere un volume sui principi della Geometria ([8]). «Sai che da tempo mi sono occupato delle questioni logiche e psicologiche che concernono l'argomento», scrive Enriques a Castelnuovo (*Riposte armonie*, 406). Nella proposta egli vede

([7]) La lettera, inedita, è conservata nel Nachlass di Hilbert. Colgo l'occasione per ringraziare la Niedersächsiche Stadt-u.Universitätsbibliothek di Göttingen per avermi messo a disposizione copia del carteggio tra Enriques e Hilbert.

([8]) Teubner aveva infatti progettato di accompagnare la pubblicazione dell'*Encyklopädie* con una serie di trattati. Il progetto non andrà in porto e i trattati non furono mai pubblicati. Oltre ai *Principi di Geometria* di Enriques, tra i titoli annunciati vi era anche un trattato sulla teoria delle superficie algebriche dello stesso Enriques e Castelnuovo, e un trattato sulla geometria iperspaziale di Segre.

«l'occasione per condurre a termine e pubblicare queste ricerche» in un volume di cui delinea il «programma» essenziale:

> «I Problemi logici inerenti al concetto di spazio (lo spazio rispetto alla teoria della conoscenza).
>
> II I fondamenti della Geometria.
> Cenno storico — Esposizione dei fondamenti della teoria dell'estensione (secondo la mia nota del Circ[olo] di Palermo). Esposizione dei principii della G[eometria] pr[oiettiv]a e delle metriche subordinate. Esposizione dei principii della G[eometri]a metrica, per via sintetica, partendo dai post[ulat]i che si desumono dalle ricerche di Lie (parte nuova).
>
> III Problemi psicologici (e biologici) inerenti all'acquisto delle nozioni spaziali» (*Riposte armonie*, 406).

È ancora Klein ad avvertire Enriques «che nell'Introduzione alla Geometria Analitica dello Schur vi sono alcune considerazioni (di cui dovrei tener conto) sui fondamenti della Geometria proiettiva, e segnatamente su ciò che il teorema di Pascal ha relazione colla proprietà commutativa della moltiplicazione» (*Riposte armonie*, 408), un tema che viene ampiamente trattato da Hilbert nel cap. VI dei *GG*. È lo stesso Klein, con il volumetto di conferenze (Klein 1895) tradotto in italiano da Giudice, a fornire a Enriques l'idea iniziale per il suo volume di *Questioni* (Enriques 1900) dove trovano spazio, per mano di Castelnuovo, le considerazioni che Hilbert svolge nei *GG* sulle costruzioni geometriche con riga e compasso. È infatti da Castelnuovo che, verso la metà di giugno, Enriques ha notizia dell'avvenuta pubblicazione del lavoro di Hilbert, e l'8 luglio 1899, «incoraggiato dalla gentilezza della sua ultima cartolina» si rivolge direttamente al matematico di Gottinga pregandolo di inviargli una copia della sua «memoria molto importante sui fondamenti della geometria» perché «vorrei (giacché sono in tempo) tenerne conto per il mio articolo dell'enciclopedia».

Così, pochi mesi dopo la pubblicazione, i *GG* sono tra le mani dei geometri italiani, a cominciare da Enriques e Castelnuovo.

BIBLIOGRAFIA

F. AMODEO, *Quali possono essere i postulati fondamentali della geometria proiettiva di uno S_r*, Atti della R. Accademia delle Scienze, Torino, **26** (91), 741-770.

G. ARRIGHI (a cura di), *Lettere a Mario Pieri* (1884-1913), Quaderni PRISTEM, **6** (1997).

M. AVELLONE - A. BRIGAGLIA - C. ZAPPULLA, *The foundations of projective geometry in Italy from De Paolis to Pieri*, to appear in Archive for History of Exact Sciences.

M. BORGA - P. FREGUGLIA - D. PALLADINO, *I contributi fondazionali della scuola di Peano*, Milano, 1985.

U. BOTTAZZINI, *Va' pensiero. Immagini della matematica nell'Italia dell'Ottocento*, Bologna, 1994.

U. BOTTAZZINI - A. CONTE - F. GARIO (a cura di), *Riposte armonie. Lettere di Federigo Enriques a Guido Castelnuovo*, Torino, 1996.

S. BOZZI, *Vailati e la logica*, in *I mondi di carta di Giovanni Vailati*, a cura di Mauro de Zan, Milano, 2000, 88-111.

A. BRIGAGLIA, *Giuseppe Veronese e la geometria iperspaziale in Italia*, in *Le scienze matematiche nel Veneto dell'Ottocento*, Atti del III seminario di storia delle scienze, Istituto Veneto di Scienze, Lettere e Arti, Venezia, 1994, 231-261.

BURALI-FORTI, *Logica matematica*, Milano, 1894.

P. CANTÙ, *Giuseppe Veronese e i fondamenti della geometria*, Milano, 1999.

G. CASTELNUOVO, *Commemorazione del socio Federigo Enriques*, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, **2** (1947), 3-21 (= F. Enriques, *Memorie scelte,* vol. **1**, iii-xxii).

A. CLEBSCH, *Vorlesungen über Geometrie*, Bd. 2, hrsg. von F. Lindemann, Leipzig, 1891.

R. DE PAOLIS, *Sui fondamenti della geometria proiettiva*, Memorie della R. Accademia dei Lincei, **9** (1881), 489-503.

F. ENRIQUES, *Sui gruppi continui di trasformazioni nel piano*, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, **2** (1893a), 468-473 (= F. Enriques, *Memorie scelte,* vol. **1**, 1-7).

F. ENRIQUES, *Sopra un gruppo continuo di trasformazioni di Jonquières nel piano*, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, **2** (1893b), 532-538 (= F. Enriques, *Memorie scelte,* vol. **1**, 9-15).

F. ENRIQUES, *Sui fondamenti della geometria proiettiva*, Rendiconti dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, **27** (1894), 550-567 (= F. Enriques, *Memorie scelte,* vol. **1**, 141-157).

F. ENRIQUES, *Conferenze di Geometria tenute nella R. Università di Bologna*, Bologna (litogr.), 1894-95.

F. ENRIQUES, *Lezioni di geometria proiettiva*, Bologna, 1898a.

F. ENRIQUES, *Sulle ipotesi che permettono l'introduzione delle coordinate in una varietà a più dimensioni*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, **12** (1898b), 222-239.

F. ENRIQUES, *Questioni riguardanti la geometria elementare*, Bologna, 1900.

F. ENRIQUES, *Prinzipien der Geometrie*, Encykl. Math. Wissenschaften, III, **1** (1907), 1-129.

[ENRIQUES-FANO], *Corrispondenza*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, **9**, 79-85.

G. FANO, *Sui postulati fondamentali della geometria proiettiva in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni*, Giornale di Matematiche, **30** (1892), 106-132.

H. FREUDENTHAL, *Die Grundlagen der Geometrie um die Wende des 19. Jahrhunderts*, Math. Phys. Sem. Berlin, **7** (1960), 2-25.

G. GEMINIANI, *L'infinitesimo attuale: una polemica di cent'anni fa*, in *Peano e i fondamenti della matematica*, Atti del convegno, Accademia Nazionale di Scienze, Lettere e Arti, Modena, 1993, 287-301.

T. HAWKINS, *The Erlanger Programm of F. Klein. Reflections on its place in the history of mathematics*, Historia Mathematica, **11** (1984), 442-470.

D. HILBERT, *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig, 1899.

D. HILBERT, *Mathematische Probleme*, Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1900, 253-297 (= D. Hilbert, *Gesammelte Abhandlungen*, vol. **3**, 290-329).

D. HILBERT, *Ueber Flächen von konstanter Gaussscher Krümmung*, Trans. Amer. Math. Soc., **2** (1901), 87-99.

D. HILBERT, *Fondamenti della geometria*, Milano, 1970.

D. HILBERT, *Les fondements de la géometrie*, Edition critique avec introduction et complemets préparée par Paul Rossier, Paris, 1971.

[HILBERT-KLEIN], *Der Briefwechsel David Hilbert-Felix Klein* (1886-1918) mit Anmerkungen herausgegeben von G. Frei, Göttingen, 1985.

F. KLEIN, *Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie I,* Mathematische Annalen, **4** (1871) (=F. Klein, *Ges. Math. Abhandlungen*, vol. I, 254-305).

F. KLEIN, *Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie II*, Mathematische Annalen, **6** (1873) (=F. Klein, *Ges. Math. Abhandlungen*, vol. I, 311-343).

F. KLEIN, *Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti*, Annali di Matematica pura ed applicata (2), **17** (1890a), 307-343.

F. KLEIN, *Zur Nicht-Euklidische Geometrie*, Mathematische Annalen, **37** (1890b) (= F. Klein, *Ges. Math. Abhandlungen*, vol. I, 353-383).

F. KLEIN, *Vorlesungen über Nicht-Euklidische Geometrie*, hrsg. von F. Schilling, 2 Bde, Leipzig, 1892.

F. KLEIN, *Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie*, hrsg. von F. Tägert, Leipzig, 1895 (trad. it.: *Conferenze sopra alcune questioni di geometria elementare*, Torino 1896).

F. KLEIN, *Gutachten, betreffend den dritten Band der Teorie der Transformationsgruppen anlässich der ersten Verteilung des Lobacevskij-Preises*, Bull. Soc. Phys. Math. Kasan (2) 8 (1898) (= F. Klein, *Ges. Math. Abhandlungen*, vol. I, 384-401).

B. LEVI, *Mario Pieri*, Bollettino di Bibliografia e storia delle scienze matematiche, **15** (1913), 65-69 (= B. Levi, *Opere 1897-1926*, a cura dell'U.M.I., vol. **2**, 771-775).

G. LOLLI, *Le ragioni fisiche e le dimostrazioni matematiche*, Bologna, 1985.

G. LORIA, *Die hauptsächlisten Theorien der Geometrie in ihrer früheren und heutigen Entwicklung*, Leipzig, 1888.

H. MINKOWSKI, *Ueber die Begriffe Länge, Oberfläche und Volumen*, Jahresbericht der Deutschen Math.-Vereinigung, **9** (1901), 115-121 (= H. Minkowski, *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. 2, 122-127).

P. NASTASI, (a cura di), *Le "Conferenze americane» di Felix Klein*, Note di Matematica, Storia, Cultura, **3-4** (2000).

M. PASCH, *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Leipzig, 1882.

F. PALLADINO, (a cura di), *Le corrispondenze epistolari tra Peano e Cesàro e Peano e Amodeo*, Quaderni PRISTEM, **13** (2000).

G. PEANO, *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann preceduto dalle operazioni della logica deduttiva*, Torino 1888.

G. PEANO, *Arithmetices Principia nova methodo exposita*, Aug. Taurinorum, 1889a (= G. Peano, *Opere scelte*, a cura dell'U.M.I, vol. **2**, 20-55).

G. PEANO, *I Principii di geometria logicamente esposti*, Torino, 1889b (= G. Peano, *Opere scelte*, a cura dell'U.M.I, vol. **2**, 56-91).

G. PEANO, *Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane*, Mathematische Annalen, **36** (1890), 157-160 (= G. Peano, *Opere scelte*, a cura dell'U.M.I, vol. **1**, 110-114).

G. PEANO, *Formole di logica matematica*, Rivista di Matematica, **1** (1891a), 24-31; 182-184 (= G. Peano, *Opere scelte*, a cura dell'U.M.I, vol. **2**, 102-113).

G. PEANO, *Osservazioni del Direttore sull'articolo precedente*, Rivista di Matematica, **1** (1891b), 66-69.

G. PEANO, *Sul concetto di numero*, Rivista di Matematica, **1** (1891c), 87-102; 256-267 (= G. Peano, *Opere scelte*, a cura dell'U.M.I, vol. **3**, 80-109).

G. PEANO, *Die Grundzüge des geometrischen Kalküls*, Leipzig, 1891d.

G. PEANO, *Lettera aperta al prof. Veronese*, Rivista di Matematica, **1** (1891e), 267-269 (= Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, **6** (1892), 40-41).

G. PEANO, *Recensione al volume di G. Veronese Fondamenti di geometria a più dimensioni*, Rivista di Matematica, **2** (1892a), 143-144.

G. PEANO, *Dimostrazione dell'impossibilità di segmenti infinitesimi costanti*, Rivista di Matematica, **2** (1892b), 58-62 (= G. Peano, *Opere scelte*, a cura dell'U.M.I, vol. **3**, 110-114).

G. PEANO, *Sui fondamenti della geometria*, Rivista di Matematica, **4** (1894a), 51-90 (= G. Peano, *Opere scelte*, a cura dell'U.M.I, vol. **3**, 115-157).

G. PEANO, *Notations de logique mathématique. Introduction au Formulaire de mathématique*, Turin, 1894b (= G. Peano, *Opere scelte*, a cura dell'U.M.I, vol. **2**, 123-176).

G. PEANO, *Introduction au tome II du "Formulaire de mathématiques»*, Revue de mathématiques, **6** (1896-1899), 1-4 (= G. Peano, *Opere scelte*, a cura dell'U.M.I, vol. **2**, 196-200).

G. PEANO, *Analisi della teoria dei vettori*, Atti della R. Accademia delle Scienze Torino, **33** (1898), 513-534 (= G. Peano, *Opere scelte*, a cura dell'U.M.I, vol. **3**, 187-207).

G. PEANO, *La geometria basata sulle idee di punto e distanza*, Atti della R. Accademia delle Scienze Torino, **38** (1902), 6-10 (= G. Peano, *Opere scelte*, a cura dell'U.M.I, vol. **3** (1902), 268-272).

G. PEANO, *Super theorema de Cantor-Bernstein*, Rivista di Matematica, 8 (1906), 136-143 (= G. Peano, *Opere scelte*, a cura dell'U.M.I, vol. **1**, 337-344).

G. PEANO, *Le definizioni in matematica*, Periodico di Matematiche, **1** (1921), 175-189 (= G. Peano, *Opere scelte*, a cura dell'U.M.I, vol. **2**, 423-435).

M. PIERI, *Sui principi che reggono la geometria di posizione. Nota I*, Atti della R. Accademia delle Scienze Torino, **30** (1894-1895), 607-641 (= M. Pieri, *Opere sui fondamenti della matematica*, a cura dell'U.M.I., 13-47).

M. PIERI, *Sui principi che reggono la geometria di posizione. Nota II, Nota III*, Atti della R. Accademia delle Scienze Torino, **31** (1895-1896), 381-399; 457-470 (= M. Pieri, *Opere sui fondamenti della matematica*, a cura dell'U.M.I., 49-82).

M. PIERI, *Un sistema di postulati per la geometria proiettiva astratta degli iperspazi*, Rivista di Matematica, **6** (1896-1899), 9-16 (= M. Pieri, *Opere sui fondamenti della matematica*, a cura dell'U.M.I., 83-90).

M. PIERI, *Sugli enti primitivi della geometria proiettiva astratta*, Atti della R. Accademia delle Scienze Torino, **32** (1896-1897), 343-351 (= M. Pieri, *Opere sui fondamenti della matematica*, a cura dell'U.M.I., 91-99).

M. PIERI, *I principii della geometria di posizione composti in un sistema logico deduttivo*, Memorie della R. Accademia delle Scienze, Torino, **48** (1897-1898), 1-62 (= M. Pieri, *Opere su i fondamenti della matematica*, a cura dell'U.M.I., 101-162).

M. PIERI, *Nuovo modo di svolgere deduttivamente la geometria projettiva*, Rendiconti del R. Istituto Lombardo, **31** (1898), 780-798 (= M. Pieri, *Opere su i fondamenti della matematica*, a cura dell'U.M.I., 163-181).

M. Pieri, *Della geometria elementare come sistema ipotetico deduttivo. Monografia del punto e del moto*, Memorie della R. Accademia delle Scienze, Torino, **49** (1898-1999), 173-222 (= M. Pieri, *Opere su i fondamenti della matematica*, a cura dell'U.M.I., 183-234).

M. Pieri, *Sur la géométrie envisagée comme un système purement logique*, Bibliothèque du Congrès International de Philosophie, **III** (1900), 367-404 (= M. Pieri, *Opere su i fondamenti della matematica*, a cura dell'U.M.I., 235-272).

B. Riemann, *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 13 (= B. Riemann, *Gesammelte Mathematische Werke*, hrsg. von H. Weber, Leipzig 1876, 272-287; repr Springer, New York, 1990; trad. it. *Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria*, Torino, 1994).

B. Russell, *Autobiography*, **3** vols., Boston, 1967-1969 (repr. Routledge, London, 1991).

E. Schröder, *Der Operationskreis der Logikkalküls*, Leipzig, 1877.

C. Segre, *Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni*, Memorie della R. Accademia delle Scienze, Torino, **36** (1883a), 3-86 (= C. Segre, *Opere*, a cura dell'U.M.I, vol. **3**, 25-126).

C. Segre, *Sulla geometria della retta e delle sue serie quadratiche*, Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, **36** (1883b), 87-157 (= C. Segre, *Opere*, a cura dell'U.M.I, vol. **3**, 127-217).

C. Segre, *Su alcuni indirizzi nelle investigazioni geometriche. Osservazioni dirette ai miei studenti*, Rivista di Matematica, **1** (1891), 42-66 (= C. Segre, *Opere*, a cura dell'U.M.I, vol. **4**, 387-412).

M.-M. Toepell, *Ueber die Entstehung von David Hilberts «Grundlagen der Geometrie»*, Göttingen, 1986.

G. Vailati, *Sui principi fondamentali della geometria della retta*, Rivista di Matematica, **2** (1892), 71-75 (= *Scritti di G. Vailati* (*1863-1909*), 1911, 9-13).

G. Veronese, *Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Princip des Projicirens und Schneidens*, Mathematische Annalen, **19** (1882), 161-234.

G. Veronese, *La superficie omaloide normale a due dimensioni e del quarto ordine dello spazio a cinque dimensioni e le sue projezioni nel piano e nello spazio ordinario*, Memorie della R. Accademia dei Lincei, **19** (1883-1884), 344-371.

G. Veronese, *Il continuo rettilineo e l'assioma V d'Archimede*, Memorie della R. Accademia dei Lincei, **6** (1889), 603-624.

G. Veronese, *Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee esposti in forma elementare*, Padova, 1891.

G. Veronese, *A proposito di una lettera del prof. Peano*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, **6** (1892), 42-47.

G. VERONESE, *Osservazioni sui principii della geometria*, Atti e Memorie della R. Accademia di Scienze Lettere e Arti in Padova, **10** (1893-1894), 195-216.

G. VERONESE, *Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen und mehreren Arten gradliniger Einheiten in elementar Form entwickelt*, Leipzig, 1894.

G. VERONESE, *Sul postulato della continuità*, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, **6** (1897) (1° sem.), 161-168.

Umberto Bottazzini, Dipartimento di Matematica, Università di Palermo