Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Francesco Barioli

Dualità e teoria dei grafi per la completa positività di matrici

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **4-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2001), n.3 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 391–394.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2001_8_4A_3_391_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2001.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. IV-A, Dicembre 2001, 391-394

Dualità e teoria dei grafi per la completa positività di matrici.

FRANCESCO BARIOLI

Le matrici semidefinite positive e le matrici nonnegative costituiscono due tra le più studiate classi di matrici, con importanti applicazioni in ogni campo. Una matrice che sia allo stesso tempo semidefinita positiva e nonnegativa è detta *doppiamente nonnegativa*, e chiaramente eredita molte interessanti proprietà. Una tra queste è la possibilità di scrivere A come il prodotto $W^T W$ per un'opportuna matrice reale W. Se, in aggiunta, A può essere fattorizzata nella forma $V^T V$ con V a sua volta nonnegativa, A viene detta *completamente positiva*.

Le matrici completamente positive sono state studiate a partire dai primi anni '60, trovando applicazioni in svariati campi. In [2] la completa positività è connessa con un modello matematico di domanda energetica proposto da alcuni settori dell'economia U.S.A. In questa formulazione gli elementi di V sono parametri che, oltre a dover soddisfare $V^T V = A$, devono essere nonnegativi in virtù della loro interpretazione fisica. La fattorizzazione nonnegativa trova interesse anche in statistica nel contesto dei vettori random, così come nella teoria delle disuguaglianze e lo studio dei block design.

Il problema principale è quello di riconoscere se una data matrice doppiamente nonnegativa sia o meno completamente positiva. Sono stati ottenuti fino ad oggi vari risultati, ma nessuno definitivo. Innanzitutto, nel caso di matrici di ordine non superiore a 4, la condizione di doppia nonnegatività, oltre che necessaria, risulta essere pure sufficiente. Altri risultati interessanti sono stati ottenuti introducendo strumenti propri della teoria dei grafi. Data una matrice simmetrica A, associamo ad essa il grafo $G(A)$ definito dai seguenti insiemi di vertici ed archi

$$V(G(A)) = \{1, \ldots, n\},$$

$$E(G(A)) = \{(i, j) \mid i \neq j,\ a_{ij} \neq 0\}.$$

Si dimostra facilmente che lo studio può essere ristretto ai soli grafi connessi. Un primo risultato interessante è la *cancellazione di foglie* di Berman-Hershkowitz. Questa è infatti l'idea originaria che è stata generalizzata nella tesi.

DEFINIZIONE 1. – *Due vertici i, j in un grafo connesso G si dicono (direttamente) connessi se $(i, j) \in G$.*

DEFINIZIONE 2. – *Un vertice i è una foglia se esiste un unico vertice $j \neq i$ connesso ad i.*

TEOREMA 1 (Berman-Hershkowitz, 1987 [1]). – *Sia A doppiamente nonnegativa e $G(A)$ abbia una foglia i connessa al vertice j. Allora A è completamente* *positiva se e solo se è completamente positiva la matrice*

$$A^{(1)} = \left[A - \frac{a_{ij}^2}{a_{ii}} E_{jj} \right](i)$$

(E_{jj} rappresenta la $0-1$ matrice $n \times n$ con unica entrata non nulla nel posto (j, j), mentre (i) sta a significare che si considera la matrice privata dell'i-esima riga e colonna).

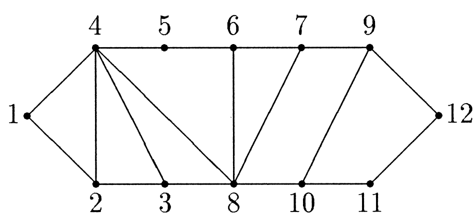
In pratica per testare la completa positività di A, si può ridurre il problema alla matrice $A^{(1)}$, di ordine $n-1$, e tale che $G(A^{(1)})$ è uguale a $G(A)$ privato della foglia stessa. La nostra generalizzazione parte dall'introduzione della nozione di *orecchietta,* ossia

DEFINIZIONE 3. – *Se i, j, k sono tre distinti vertici di un grafo G, diremo che $(i; j, k)$ costituiscono una orecchietta se i è connesso soltanto a j e k. Il vertice i viene detto vertice dell'orecchietta.*

Come nel caso delle foglie, anche in questo caso viene definita una matrice $A^{(1)}$ di ordine $n-1$ il cui grafo è $G(A)$ privato dell'orecchietta $(i; j, k)$. Sotto l'ipotesi di *diminuibilità,* che sostanzialmente è una condizione leggermente più forte della singolarità, si ha

TEOREMA 2. – *Sia A doppiamente nonnegativa e diminuibile, tale che $G(A)$ contenga l'orecchietta $(1; 2, 3)$. Allora A è completamente positiva se e solo se $A^{(1)}$ è completamente positiva.*

Il Teorema 2 può essere applicato induttivamente se il grafo $G(A)$ è un *ciclo senza incroci,* che sostanzialmente è una sequenza di triangoli uniti l'un l'altro lungo un arco.



In questo caso, grazie al Teorema 2 si possono definire le matrici $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n-4)}$, di ordine rispettivamente $n-1$, $n-2, \ldots, 4$, e si perviene al

COROLLARIO 1. – *Sia A doppiamente nonnegativa singolare, e $G(A)$ sia un ciclo senza incroci. Allora A è completamente positiva se e solo se, per ogni $j \leqslant n-4$, $A^{(j)}$ è nonnegativa.*

Quindi la completa positività viene ricondotta ad un semplice test di nonnegatività su un insieme (finito) di matrici.

Altri risultati interessanti si ottengono considerando il problema da un punto di vista geometrico, introducendo la seguente

DEFINIZIONE 4. – *Un insieme di vettori* $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n \in \mathbf{R}^k$ *è detto un insieme acuto (o un pennello) se* $\mathbf{w}_i^T \mathbf{w}_j \geqslant 0 \ \forall i, j$.

Sia A doppiamente nonnegativa e *rank* $A = k$. Allora $A = W^T W$ per qualche matrice W $(k \times n)$. Per ogni matrice V $(t \times n)$, si ha $V^T V = W^T W = A$ se e solo se $V = Q^T W$ per qualche matrice Q $(k \times t)$ a righe ortonormali, cioè tale che $QQ^T = I_k$. Il problema della completa positività assume perciò la seguente forma: *Dato un pennello di n vettori in* $\mathbf{R}^k$, *è possibile trovare un'isometria* $\mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^t$ *per qualche t, che mandi il pennello nel primo ortante (positivo)?*

DEFINIZIONE 5. – *Se A è completamente positiva, il minimo t tale che esiste una matrice V nonnegativa* $t \times n$ *con* $A = V^T V$, *è chiamato l'indice di fattorizzazione o Cp-rango di A e viene denotato con* Cp-rank A.

In generale il Cp-rango non è noto. Dipende in qualche modo dal rango e dall'ordine della matrice. Chiaramente Cp-rank $A \geqslant$ rank A. J. Hanna e T.J. Laffey hanno fissato il seguente limite superiore

TEOREMA 3. – (Hanna-Laffey, 1983 [3]) *Sia A completamente positiva con rango k. Allora*

$$\text{Cp-rank } A \leqslant \frac{k(k+1)}{2}.$$

Considerando tutte le matrici completamente positive di fissato rango k e dimensione qualsiasi, definiamo allora il k-esimo Cp-rango Φ_k

$$\Phi_k = \max\{\text{Cp-rank } A \,|\, \text{rank } A = k,\ n = 1, 2, \ldots\}.$$

Ovviamente dal teorema di Hanna e Laffey si ricava immediatamente

$$k \leqslant \Phi_k \leqslant \frac{k(k+1)}{2}.$$

Il nostro risultato principale consiste nell'esatta determinazione del valore di Φ_k ed esattamente

TEOREMA 4. – *Per ogni* $k \geqslant 2$ *si ha*

$$\Phi_k = \frac{k(k+1)}{2} - 1.$$

In particolare viene presentato un metodo per determinare matrici di rango k e Cp-rango $\frac{k(k+1)}{2} - 1$, ovverosia il massimo possibile.

Infine, stabilito che ogni matrice doppiamente nonnegativa individua, a meno di isometria, un pennello di vettori W, e quindi il cono da questi ultimi generato, vengono definite l'*apertura inferiore* e l'*apertura superiore* di tale cono. Si tratta della naturale generalizzazione della nozione di apertura nota per i coni circolari.

Denotate con $\vartheta^-_{\mathcal{W}}$ e $\vartheta^+_{\mathcal{W}}$ le aperture inferiori e superiori rispettivamente, e posto

$$\vartheta_k = \arccos\sqrt{\frac{k-1}{k}}\,,$$

definiamo

DEFINIZIONE 6. – *Un pennello W di rango k è detto*
stretto *se* $\vartheta^+_{\mathcal{W}} \leq \vartheta_k$;
medio *se* $\vartheta^-_{\mathcal{W}} < \vartheta_k < \vartheta^+_{\mathcal{W}}$;
largo *se* $\vartheta^-_{\mathcal{W}} = \vartheta_k$;
extralargo *se* $\vartheta^-_{\mathcal{W}} > \vartheta_k$.

A seconda dell'apertura il comportamento nei confronti della completa positività varia notevolmente. Il caso stretto è il più semplice

TEOREMA 5. – *Sia W un pennello di vettori di rango k. Se W è stretto, allora W è completamente positivo e* Cp-rank $W = k$.

Se invece W è largo, la completa positività dipende dall'esistenza di soluzioni non negative di un opportuno sistema lineare facilmente ottenibile a partire da W. Per i pennelli larghi siamo anche in grado di fornire un metodo per l'esatta determinazione del Cp-rango, che qui non presentiamo. Infine si possono dare informazioni anche sui pennelli extralarghi. Più in particolare

TEOREMA 6. – *Sia W un pennello di vettori di rango k. Se W è extralargo, allora W non è completamente positivo.*

Riassumendo, per pennelli stretti, larghi ed extralarghi, il problema della completa positività e della determinazione del Cp-rango è definitivamente risolto. Viceversa rimane ancora aperta la questione relativamente alla sola classe dei pennelli medi, per i quali, al momento non si hanno informazioni di particolare rilievo.

BIBLIOGRAFIA

[1] BERMAN A. and HERSHKOWITZ D., *Combinatorial results on completely positive matrices*, Linear Algebra and its Applications, **95** (1987), 111-125.
[2] GRAY L. J. and WILSON D. G., *Nonnegative factorization of positive semidefinite nonnegative matrices*, Linear Algebra and its Applications, **31** (1980), 119-127.
[3] HANNA J. and LAFFEY T. J., *Nonnegative factorization of positive semidefinite nonnegative matrices*, Linear Algebra and its Applications, **55** (1983), 1-9.
[4] KOGAN N. and BERMAN A., *Characterization of Completely Positive Graphs*, Discrete Math., **114** (1993), 287-299.

Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata, Università di Padova
e-mail: fbarioli@math.unipd.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Padova) - Ciclo XII
Direttore di ricerca: Prof. L. Salce, Università di Padova