BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

DANIELE BARTOLUCCI

Problemi ellittici non lineari con dati singolari e applicazioni alla teoria elettrodebole di Glashow-Salam-Weinberg

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **4-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2001), n.3 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 395–398.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2001_8_4A_3_395_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2001.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. IV-A, Dicembre 2001, 395-398

Problemi ellittici non lineari con dati singolari e applicazioni alla teoria elettrodebole di Glashow-Salam-Weinberg.

DANIELE BARTOLUCCI

Motivati dalle applicazioni alla Teoria Elettrodebole di Glashow-Salam-Weinberg [6], siamo interessati a determinare l'esistenza di soluzioni della seguente equazione,

$$(1) \qquad -\Delta_g u = \lambda \frac{Ve^u}{\int_M Ve^u \, d\tau_g} - W \qquad in\ M, \qquad (1)_\lambda,$$

dove (M, g) è una varietà compatta Reimanniana bidimensionale e Δ_g e $d\tau_g$ sono nell'ordine l'operatore di Laplace-Beltrami e l'elemento di volume corrispondenti alla metrica g. Inoltre consideriamo $\lambda > 0$ e le funzioni V e W che soddisfano

$$(2) \qquad 0 < a \leqslant V(x) \leqslant b, \qquad \text{con} \qquad 0 < a \leqslant b,$$

$$(3) \qquad W = 4\pi \left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \delta_{p_j} - \phi(x) \right),$$

con $\phi \in L^\infty(M)$, $\alpha_j > 0$, $p_j \in M$, $j = 1, \ldots, m$. Qui δ_p denota la massa di Dirac con polo nel punto $p \in M$. Se $\lambda < 8\pi$ l'esistenza di soluzioni per (1) segue per minimizzazione da una disuguaglianza di Moser-Trudinger [4]. Al contrario, se $\lambda \geqslant 8\pi$, a causa di possibili fenomeni di concentrazione, il problema dell'esistenza di soluzioni diviene molto più delicato e la maggior parte dei progressi fatti in questa direzione (vedere per esempio i lavori di M. Struwe e G. Tarantello [7] e W. Ding et al. [3]) sono limitati al range di valori $\lambda \in [8\pi, 16\pi)$ e riguardano il caso regolare in cui W non contiene dati di tipo misura e quindi $\alpha_j = 0$, $j = 1, \ldots, m$ in (3). Da questo punto di vista sono di cruciale importanza i lavori di Brezis-Merle [1] e Li-Shafrir [5] che, assegnate V e W verificanti rispettivamente (2) e (3) con $\alpha_j = 0$, $j = 1, \ldots, m$, garantiscono che le soluzioni di (1) sono uniformemente limitate in norma $C^0(M)$, per ogni $\lambda \in \Lambda \subset\subset \mathbb{R} \setminus 8\pi\mathbb{N}$. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio aperto limitato, v_n una successione di soluzioni dell'equazione:

$$(4) \qquad -\Delta v_n = V_n e^{v_n} \qquad \text{in } \Omega,$$

verificante

$$\int_\Omega e^{v_n} \leqslant C, \tag{5}$$

$$0 \leqslant V_n \leqslant b \quad \text{in } \Omega, \tag{6}$$

con C e b costanti positive. Definiamo l'insieme di «blow-up» relativo a v_n:

$$S := \{x \in \Omega \mid \exists x_n \in \Omega \text{ tale che } x_n \to x \text{ e } v_n(x_n) \to +\infty\}. \tag{7}$$

Brezis e Merle [1] hanno dimostrato il seguente:

TEOREMA 1 (Brezis-Merle). – *Sia v_n una successione di soluzioni di* (4), *verificanti* (5) *e* (6). *Allora esiste una sottosuccessione v_{n_k} di v_n, per la quale si verifica una e una sola sola delle tre seguenti alternative:*

i) v_{n_k} è uniformemente limitata in $L^\infty_{\text{loc}}(\Omega)$,

ii) $v_{n_k} \to -\infty$ uniformemente sui sottoinsiemi compatti di Ω,

iii) l'insieme di blow-up S (relativo a v_{n_k}) è finito e nonvuoto, ovvero $S = \{p_1, \ldots, p_r\} \subset \Omega$ con $r \in \mathbb{N}$, ed esistono r successioni in Ω $\{x_n^1\}_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, \{x_n^r\}_{n\in\mathbb{N}}$, con $x_n^i \to p_i$ per $i \in 1, \ldots, r$, tali che $v_{n_k}(x_n^i) \to +\infty$ per $i \in 1, \ldots, r$, $v_{n_k} \to -\infty$ uniformemente sui sottoinsiemi compatti di $\Omega \setminus S$. Inoltre $V_{n_k} e^{v_{n_k}} \to \sum_{i=1}^{r} \beta_i \delta_{p_i}$ debolmente nel senso delle misure in Ω e $\beta_i \geqslant 4\pi$ per ogni $i \in 1, \ldots, r$.

Li-Shafrir in [5] hanno approfondito lo studio della alternativa *iii*) e, assumendo

$$V_n \in C^0(\overline{\Omega}), \qquad V_n \to V \quad \text{uniformemente in } \overline{\Omega}, \tag{8}$$

hanno dimostrato che ogni punto di blow up p_i contribuisce con massa $\beta_i = 8\pi m_i$, $m_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \ldots, r$. Quindi, in questo caso particolare,

$$\lim_{k\to\infty} \int_K V_{n_k} e^{v_{n_k}} = 8\pi m, \qquad m \in \mathbb{N}, \ \forall K \subset\subset \Omega. \tag{9}$$

Le stime uniformi in norma $C^0(M)$ per le soluzioni di (1) nel caso regolare in cui $\alpha_j = 0$, $j = 1, \ldots, m$, si ottengono da una applicazione del Teorema 2 e dalla (9). Viceversa, nel caso singolare in cui $\alpha_j \neq 0$, $j = 1, \ldots, m$, è necessario analizzare il comportamento asintotico di una successione di soluzioni v_n dell'equazione:

$$\begin{cases} -\Delta v_n = V_n(x)\, e^{v_n} - \psi_n(x) - 4\pi\alpha\delta_{p=0} & \text{in } \Omega \\ \int_\Omega e^{v_n} \leqslant C, \end{cases} \tag{10}$$

con $\alpha > 0$ e $p = 0 \in \Omega$. L'esempio che segue mostra che l'analisi sviluppata nel caso regolare non può fornire una descrizione completa del comportamento asintotico di una arbitraria successione di soluzioni di (10). Sia $\mu_n \to +\infty$ e definiamo

$$v_n(x) = \ln \frac{\mu_n |x|^{2\alpha}}{\left(1 + \frac{1}{8(1+\alpha)^2}\mu_n |x|^{2(1+\alpha)}\right)^2}. \tag{11}$$

È facile verificare che, fissando $\Omega = B_R(0)$ il disco di centro 0 e raggio R, la successione v_n è soluzione di (10) con $V_n \equiv 1$ e $\psi_n \equiv 0$, ammette un punto di blow up nell'origine e verifica:

$$\lim_{n \to \infty} \int_{B_R(0)} e^{v_n} = 8(1+\alpha).$$

Evidentemente la (9) è violata in questo caso. Infatti, $e^{v_n} \to 8\pi(1+\alpha)\,\delta_{p=0}$ debolmente nel senso delle misure in Ω. Analizzando la situazione in cui l'insieme di blow up di una successione di soluzioni di (10) contiene il polo della misura di Dirac $p = 0$ abbiamo dimostrato il seguente:

TEOREMA 2. – *Sia v_n una successione di soluzioni di* (10). *Supponiamo che*

$$0 \leq V_n \in C^0(\overline{\Omega}) : V_n \to V \text{ uniformemente in } \overline{\Omega}, \text{ e in } C^1_{\mathrm{loc}}(\Omega), \tag{12}$$

$$\|\psi_n\|_{L^q(\Omega)} \leq C, \qquad \text{per } q > 2. \tag{13}$$

Allora esiste una sottosuccessione v_{n_k}, per la quale si verifica una e una sola delle tre seguenti alternative:

i) $\sup_K |v_{n_k}(x) - 2\alpha \ln |x|| \leq C_K, \qquad \forall K \subset\subset \Omega,$

ii) $\sup_K \{v_{n_k}(x) - 2\alpha \ln |x|\} \to -\infty, \qquad \forall K \subset\subset \Omega,$

iii) l'insieme di blow-up S (relativo a v_{k_n}) è finito e nonvuoto, ovvero $S = \{p_1, \ldots, p_r\} \subset \Omega$ con $r \in \mathbb{N}$, ed esistono r successioni in Ω $\{x_n^1\}_{n \in \mathbb{N}}, \ldots, \{x_n^r\}_{n \in \mathbb{N}}$, con $x_n^i \to p_i$ per $i \in 1, \ldots, r$, tali che $v_{n_k}(x_n^i) \to +\infty$ per $i \in 1, \ldots, r$, $\sup_K \{v_{n_k}(x) - 2\alpha \ln |x|\} \to -\infty$ su ogni sottoinsieme compatto $K \subset \Omega \setminus S$. Inoltre $V_{n_k} e^{v_{n_k}} \to \sum_{i=1}^r \beta_i \delta_{p_i}$ debolmente nel senso delle misure in Ω e $\beta_i = 8\pi\mathbb{N}$ se $p_i \neq 0$ e $\beta_i \geq 8\pi$ se $p_i = 0$ per qualche $i = 1, \ldots, l$.

Osserviamo che il verificarsi di un fenomeno di concentrazione ($V_{n_k} e^{v_{n_k}} \rightharpoonup \beta\delta_{p=0}$,) quando l'insieme di blow up coincide col polo della massa di Dirac $p = 0$, non è ovvio. Al contrario, una applicazione del Teorema 1 mostra che in questa situazione ci si potrebbe aspettare che la successione v_n rimanga uniformemente limitata sui sottinsiemi compatti di $\Omega \setminus \{0\}$, e infatti il metodo adottato in [1] per realizzare la alternativa *iii)* non può essere applicato in questo caso. In particolare si può dimostrare che la successione di funzioni regolari $u_n(x) = v_n(x) - 2\alpha \ln |x| - \sigma_n(x)$, con $\Delta\sigma_n = \psi_n$, è soluzione dell'equazione (4) con funzione peso $\widetilde{V}_n(x) = |x|^{2\alpha} e^{\sigma_n(x)} V_n(x)$ che verifica (6), ma che la condizione (5) è necessariamente violata se $p = 0 \in S$. Inoltre, in prossimià del polo, si realizza una compensazione tra la divergenza di u_n e il termine $|x|^{2\alpha}$. Questa è anche la ragione per cui si rende necessario aggiungere delle condizioni al bordo appropriate per ottenere informazioni più dettagliate sul valore della massa β_i quando $p_i = 0$, come mostra il seguente:

TEOREMA 3. – *Supponiamo che* V_n *e* ψ_n *verifichino* (12)-(13). *Sia* v_n *una successione di soluzioni di* (10) *tale che* $\sup_{\partial\Omega} v_n - \inf_{\partial\Omega} v_n \leq C$, *con* C *costante positiva. Se il polo* $p = 0$ *della misura di Dirac è l'unico punto di blow up in* Ω, *allora esiste una sottosuccessione* v_{n_k} *di* v_n *tale che, per* $k \to +\infty$,

(14) $V_{n_k} e^{v_{n_k}} \to 8\pi(1+\alpha)\,\delta_{p=0}$, *debolmente nel senso delle misure in* Ω.

La dimostrazione del Teorema 3 si basa sul Teorema 2 e sull'analisi della identità di Pohozaev. Un risultato analogo nel caso regolare è stato ottenuto da Y. Y. Li in [4] tramite il metodo del moving plane e l'utilizzo di disuguaglianze di tipo Harnack, note in letteratura come disugualianze «Sup+Inf» [2], la cui validità nel caso singolare è un interessante problema aperto. Concludiamo osservando che una applicazione del Teorema 3 fornisce stime uniformi in norma $C^0(M)$, per le soluzioni di $(1)_\lambda$, $\forall \lambda \in \Lambda \subset\subset \mathbb{R} \setminus \{8\pi\mathbb{N} + 8\pi \sum_{j=1}^{m}(1+\alpha_j)\}$, che possono essere utilizzate con profitto per dimostrare esistenza di soluzioni di (1) con $\lambda \in (8\pi, 16\pi)$. Grazie a questi risultati, possiamo estendere le condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di stati periodici di tipo vortice, ottenuti da J. Spruck e Y. Yang [6] nella Teoria Elettrodebole di Glashow-Salam-Weinberg.

BIBLIOGRAFIA

[1] H. BREZIS, F. MERLE, *Uniform estimates and blow-up behaviour for solutions of* $-\Delta u = V(x)\,e^u$ *in two dimensions,* Comm. in P. D. E., **16** (1999), 1223-1253.

[2] H. BREZIS, Y. Y. LI, I. SHAFRIR, *A Sup+Inf inequality for some nonlinear elliptic equations involving exponential nonlinearities,* J. Funct. Anal., **115** (1993), 344-358.

[3] W. DING, J. JOST, J. LI, G. WANG, *Existence results for mean field equations*, Ann. Inst. H. Poincarè Anal. Non Lin., **16** (1999).

[4] Y. Y. LI, *Harnack Type inequality: the Method of Moving Planes*, Comm. Math. Phys., **200** (1999), 421-444.

[5] Y. Y. LI, I. SHAFRIR, *Blow-up analysis for Solutions of* $-\Delta u = V(x)\,e^u$ *in dimension two,* Ind. Univ. Math. J., **43** (1994), 1255-1270.

[6] J. SPRUCK, Y. YANG, *On Multivortices in the Electroweak Theory I: Existence of Periodic Solutions*, Comm. Math. Phys., **144** (1992), 1-16.

[7] M. STRUWE, G. TARANTELLO, *On multivortex solutions in Chern-Simons gauge theory,* Boll. U. M. I., 8 (1998), 109-121.

Dipartimento di Matematica, Università di Roma «Tor Vergata»
e-mail: bartoluc@axp.mat.uniroma2.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Milano) - Ciclo XII
Direttore di Ricerca: Prof. G. Tarantello, Università di Roma «Tor Vergata»