Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Elena Bosetto

Soluzioni di tipo «multibump» e dinamiche caotiche in una classe di equazioni differenziali periodiche

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **4-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2001), n.3 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 403–406.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2001_8_4A_3_403_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2001.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. IV-A, Dicembre 2001, 403-406

Soluzioni di tipo «multibump» e dinamiche caotiche in una classe di equazioni differenziali periodiche.

ELENA BOSETTO

Oggetto della tesi è lo studio dell'esistenza di dinamiche di tipo caotico per una classe di equazioni scalari della forma

$$\ddot{u}(t) + W'(t, u(t)) = h(t), \tag{1}$$

dove $W \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R} \times \mathbf{R}; \mathbf{R})$ è T-periodica in t e S-periodica in u (con W' si indica $\partial W/\partial u$), mentre $h \in \mathcal{C}(\mathbf{R} \times \mathbf{R})$ è T-periodica e a media nulla. L'esempio più familiare di equazioni del tipo (1) è fornito dall'equazione del pendolo forzato, che costituisce un problema modello nello studio dell'analisi non lineare e dei sistemi dinamici. Seguendo [4] utilizziamo la seguente

DEFINIZIONE 1. – *Diciamo che l'equazione* (1) *ha una dinamica di tipo caotico se:*

1) *ammette infinite soluzioni periodiche, di periodo arbitrariamente grande;*
2) *possiede un'infinità non numerabile di soluzioni non periodiche limitate;*
3) *le sue soluzioni dipendono sensibilmente dalle condizioni iniziali;*
4) *la mappa di Poincaré ad essa associata ha entropia topologica positiva.*

La dimostrazione dell'esistenza di dinamiche di tipo caotico viene condotta attraverso la costruzione di soluzioni di tipo multibump omocline ed eterocline a coppie di soluzioni periodiche u_0 e u_1 di (1), mediante l'uso di metodi variazionali globali.

Ricordiamo che una soluzione $q \neq u_0$ dell'equazione (1) è detta *omoclina* a u_0 se è asintotica a u_0 a $\pm\infty$, mentre si dice *eteroclina* a u_0 e u_1 se connette u_0 con u_1 (cioè se $\lim_{t \to -\infty} (q(t) - u_0(t)) = 0$ e $\lim_{t \to +\infty} (q(t) - u_1(t)) = 0$). Analoghe definizioni valgono per le soluzioni omocline a u_1 e per le connessioni eterocline tra u_1 e u_0. Utilizziamo infine il termine «*multibump*» per indicare che la soluzione q oscilla un numero arbitrario di volte (eventualmente infinito) tra u_0 e u_1 prima di convergere agli stati periodici prefissati a $\pm\infty$.

Per mettere a confronto il nostro tipo di approccio al problema con la teoria classica, basata sull'applicazione di metodi geometrici e topologici, definiamo la mappa di Poincaré $P : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ ponendo $P(x, y) = (u(T), \dot{u}(T))$ dove $u(t)$ è la soluzione dell'equazione (1) con condizioni iniziali $u(0) = x$ e $\dot{u}(0) = y$. Le soluzioni periodiche u_0 e u_1 di (1) corrispondono allora a punti fissi $(u_0(0), \dot{u}_0(0))$ e $(u_1(0), \dot{u}_1(0))$ di P. Se tali punti fissi sono di tipo *iperbolico* (cioè se la mappa linearizzata $DP(u_i(0), \dot{u}_i(0))$, $i = 0, 1$, non ha autovalori di modulo uno), è possibile definire le corrispondenti varietà stabili ed instabili

$$\mathcal{W}^{s/u}(u_i) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 :\ P^n(x, y) \to (u_i(0), \dot{u}_i(0)) \ \text{ per } \ n \to \pm\infty\}$$

e riformulare le definizioni di soluzioni omocline/eterocline in termini della mappa P. Per esempio, diremo che $(\bar{x}, \bar{y})$ è omoclino a $(u_0(0), \dot{u}_0(0))$ se $(\bar{x}, \bar{y}) \neq (u_0(0), \dot{u}_0(0))$ e $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathcal{W}^s(u_0) \cap \mathcal{W}^u(u_0)$. Il punto $(\bar{x}, \bar{y})$ è detto *punto omoclino trasverso* se i vettori tangenti a $\mathcal{W}^s(u_0)$ e $\mathcal{W}^u(u_0)$ in $(\bar{x}, \bar{y})$ non coincidono. Abbiamo invece connessioni eterocline tra u_0 e u_1 se $\mathcal{W}^u(u_0) \cap \mathcal{W}^s(u_1) \neq \emptyset$ (oppure $\mathcal{W}^s(u_0) \cap \mathcal{W}^u(u_1) \neq \emptyset$).

La presenza di punti omoclini trasversi per mappe da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}^2$ implica l'esistenza di dinamiche di tipo complesso. In effetti, in base al Teorema di Smale-Birkhoff, ogni diffeomorfismo Φ di $\mathbf{R}^2$ con un punto fisso iperbolico le cui varietà stabili ed instabili si intersecano trasversalmente, ammette un sottoinsieme iperbolico, compatto ed invariante per Φ, sul quale un'opportuna iterata Φ^n di Φ risulta topologicamente equivalente alla mappa shift $\sigma : \{0, 1\}^{\mathbf{Z}} \to \{0, 1\}^{\mathbf{Z}}$, definita da $\sigma(s)_i = s_{i+1}$ e prototipo dei sistemi caotici. Applicando il teorema di Smale-Birkhoff alla mappa di Poincaré associata a (1) è possibile, almeno in linea di principio, individuare la presenza di dinamiche caotiche nell'equazione. La verifica delle ipotesi del teorema richiede tuttavia una conoscenza estremamente accurata della geometria dello spazio delle fasi di (1), conoscenza che è molto difficile riuscire ad ottenere soprattutto nei casi in cui l'equazione non è direttamente integrabile o non corrisponde ad una piccola perturbazione di un'equazione integrabile.

Per ovviare a questo tipo di difficoltà, negli ultimi anni, a partire dal lavoro di V. Coti Zelati, I. Ekeland e E. Séré [1] e con il fondamentale contributo di E. Séré [3], i metodi variazionali sono stati applicati con successo per dimostrare l'esistenza di dinamiche caotiche in equazioni o sistemi difficilmente analizzabili mediante tecniche di tipo geometrico o perturbativo. Il vantaggio fondamentale dell'approccio variazionale risiede essenzialmente nel fatto che esso richiede in genere delle ipotesi globali relativamente deboli, che permettono di aggirare la delicata questione della verifica dell'esistenza di intersezioni trasverse tra le varietà stabili ed instabili di soluzioni di equilibrio dell'equazione o del sistema. Anche se in [1] e [3] si trattano casi più generali dell'equazione (1), caratteristica comune ad entrambi i lavori, e a numerosi altri ad essi successivi, è l'applicazione di metodi variazionali allo studio di problemi di esistenza e molteplicità di orbite omocline/eterocline a *soluzioni costanti* (tipicamente alla soluzione identicamente nulla), cosa che permette di trattare funzioni integrabili su $\mathbf{R}$ e dunque di lavorare negli usuali spazi di Sobolev. Nel caso invece della ricerca di soluzioni omocline ed eterocline a soluzioni periodiche *non* costanti, una delle difficoltà principali risiede nel fatto che le soluzioni vanno cercate in classi di funzioni non integrabili su $\mathbf{R}$ e dunque il problema non può essere interpretato variazionalmente in modo naturale.

Il contributo essenziale alla rimozione di questo ostacolo viene dato nel 1994 da P. H. Rabinowitz. In [2] l'autore studia infatti un sistema Hamiltoniano (che nel caso scalare si riduce all'equazione da noi considerata) e introduce un funzionale «ad hoc» J i cui minimi, su una classe opportuna di funzioni, corrispondono a soluzioni eterocline a coppie di soluzioni periodiche (isolate) del sistema. L'idea alla base della costruzione del funzionale J è l'assunzione di una fondamentale ipotesi di *reversibilità* del potenziale rispetto al tempo: riferita a (1), essa equivale a richiedere che $V(t, u) = W(t, u) - h(t)\, u$ sia una funzione pari in t. Tale proprietà risulta essenziale per dimostrare che il funzionale J è ben definito e sequenzialmente debolmente semicontinuo inferiormente su $H^1_{loc}(\mathbf{R})$.

Punto di partenza del lavoro della tesi è stata la dimostrazione che, per *problemi scalari*, è possibile eliminare l'ipotesi di reversibilità e provare che il funzionale J, pur godendo di minori proprietà di regolarità, è ancora lo strumento adatto per ottenere informazioni globali sulle dinamiche di (1). La dimostrazione si basa in modo essenziale sulle proprietà di ordinamento della retta reale, dunque non può essere estesa allo studio dei sistemi, per i quali la dimostrazione della buona definizione del funzionale di Rabinowitz in assenza di ipotesi di reversibilità rimane ancora un problema aperto.

Per descrivere più in particolare i nostri risultati, indichiamo con E_T lo spazio di Sobolev delle funzioni T-periodiche in $H^1_{loc}(\mathbf{R})$ e poniamo $c_p = \min_{E_T} f(u)$, dove $f(u) = \int_0^T L(u)\,dt = \int_0^T \left[\frac{1}{2}\dot{u}(t)^2 - V(t, u(t))\right] dt$ è il funzionale d'azione associato a (1). Supponiamo che u_0 e u_1 siano *minimi consecutivi* di f, cioè che:

1) $f(u_0) = f(u_1) = c_p$,

2) $u_0(t) < u_1(t)$ per ogni $t \in [0, T]$,

3) se $u \in E_T$, $f(u) = c_p$ e $u_0(t) \leq u(t) \leq u_1(t)$ $\forall t \in [0, T]$ allora $u \equiv u_0$ o $u \equiv u_1$.

Sotto tale ipotesi è possibile provare l'esistenza di soluzioni eterocline q_0 e q_1 che connettono u_0 con u_1 e viceversa. Tali orbite si ottengono come minimi globali del funzionale $J : dom(J) \subseteq H^1_{loc}(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ definito da:

$$J(q) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \left(\int_{kT}^{(k+1)T} L(q)\,dt - c_p \right)$$

sulle classi di funzioni $\Gamma_0 = \{q \in H^1_{loc}(\mathbf{R}) / q(-\infty) = u_0,\ q(+\infty) = u_1\}$ e $\Gamma_1 = \{q \in H^1_{loc}(\mathbf{R}) / q(-\infty) = u_1,\ q(+\infty) = u_0\}$. Osserviamo che la richiesta che u_0 e u_1 siano minimi consecutivi (che risulta *necessaria* per l'esistenza di soluzioni eterocline) non implica che u_0 e u_1 siano isolati in E_T o non degeneri come minimi di f ed è perciò più debole delle condizioni classiche. Le orbite q_0 e q_1 vengono quindi utilizzate come «mattoni base» per la costruzione di soluzioni di tipo multibump, nello spirito dello Shadowing Lemma. Queste soluzioni si ottengono mediante un argomento di minimizzazione vincolata e corrispondono a *minimi locali* di J nelle classi Γ_0 e Γ_1. Affinché tale costruzione risulti possibile è però necessario richiedere la seguente ipotesi di non degeneratezza sulla struttura della famiglia delle eterocline di base:

(*) $\quad \mathcal{S}_i = \{q(0) / q \in \Gamma_i \text{ e } J(q) = \min_{\Gamma_i} J\} \neq (u_0(0), u_1(0)) \quad i = 0, 1.$

L'ipotesi (*) sostituisce ed indebolisce l'ipotesi classica di trasversalità. Si è infatti provato che se u_0 e u_1 sono iperbolici (condizione da noi non richiesta) allora (*) equivale ad assumere che $\mathcal{W}^s(u_0) \neq \mathcal{W}^u(u_1)$ e $\mathcal{W}^s(u_1) \neq \mathcal{W}^u(u_0)$, dunque (*) copre anche casi di intersezione tangenziale tra le varietà stabili ed instabili di u_0 e u_1.

Utilizzando l'esistenza delle soluzioni di tipo multibump, si può quindi dimostrare abbastanza facilmente che l'equazione (1) presenta tutte le caratteristiche descritte nella definizione 1, e dunque si ottiene il seguente

TEOREMA 1. – *Se il funzionale d'azione del problema periodico associato al-*

l'equazione (1) *ammette una coppia di minimi consecutivi* u_0 *e* u_1 *e se vale* (*), *allora* (1) *esibisce una dinamica di tipo caotico.*

Dopo aver determinato condizioni sufficienti a dimostrare l'esistenza di dinamiche di tipo caotico in (1), si è cercato di stabilire «quanto spesso», rispetto al termine forzante h, tali condizioni risultassero verificate e si è ottenuto il seguente risultato di genericità per una classe di equazioni più ristretta di (1), ma comunque ancora sufficientemente ampia da contenere, ad esempio, l'equazione del pendolo forzato:

TEOREMA 2. – *Si consideri l'equazione*

$$\ddot{u}(t) + g(u(t)) = h(t), \tag{2}$$

dove $h \in \mathcal{C}(\mathbf{R};\mathbf{R})$ *è periodica a media nulla e* $G(x) := \int_0^x g(s)\,ds$ *soddisfa le ipotesi:*

(G1) $G \in \mathcal{C}^3(\mathbf{R};\mathbf{R})$ *è* S*-periodica, per qualche* $S > 0$,

(G2) *se* $|x-y| < S$ *sono zeri distinti di* g, *allora* $G(x) \neq G(y)$.

Esiste un sottoinsieme denso $\mathcal{H}$ *di*

$$X = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} X_n = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \left\{ h \in \mathcal{C}(\mathbf{R};\mathbf{R})/h \text{ è } nT\text{-periodica e } \int_0^{nT} h(t)\,dt = 0 \right\}$$

tale che per ogni $h \in \mathcal{H}$ *l'equazione* (2) *esibisce una dinamica caotica. Inoltre, per ogni* $n \in \mathbf{N}$, $\mathcal{H} \cap X_n$ *è aperto in* X_n.

Per la dimostrazione si utilizza un risultato tipo Teorema di Sard-Smale (per il quale è necessario introdurre l'ipotesi (G2), comunque generica in G) che permette di semplificare la struttura del problema, quindi si provano proprietà di regolarità della famiglia di soluzioni eterocline che connettono coppie di minimi consecutivi dell'equazione ed infine si sfrutta tale regolarità per calcolare un analogo della funzione di Poincarè (primitiva della funzione di Melnikov) mediante la quale si ottiene la conclusione desiderata.

BIBLIOGRAFIA

[1] COTI ZELATI V., EKELAND I., SÉRÉ E., *A variational approach to homoclinic orbits in Hamiltonian systems*, Math Annalen, **288** (1990), 133-160.

[2] RABINOWITZ P. H., *Heteroclinics for a reversible Hamiltonian system*, Ergod. Th. and Dyn. Sys., **14** (1994), 817-829.

[3] SÉRÉ E., *Looking for the Bernoulli shift*, Ann. IHP, Anal. non Lin., **10** (1993), 561-590.

[4] WIGGINS S., *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer Verlag, New York (1990).

Dipartimento di Matematica, Politecnico di Torino
e-mail: bosetto@dm.unito.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Genova) - Ciclo XII
Direttore di ricerca: Prof. Enrico Serra, Politecnico di Torino