Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Maurizio Brugliери

Problemi di taglio minimo con vincoli di cardinalità

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **4-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2001), n.3 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 411–414.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2001_8_4A_3_411_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2001.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. IV-A, Dicembre 2001, 411-414

Problemi di taglio minimo con vincoli di cardinalità.

MAURIZIO BRUGLIERI

1. – Introduzione.

In diverse applicazioni si richiede che le soluzioni di Problemi di Ottimizzazione Combinatoria (*COP*) già noti soddisfino in aggiunta un vincolo di cardinalità, ossia che le soluzioni contengano un prefissato numero di elementi. Sinora la famiglia dei *COP* con vincoli di cardinalità è stata poco esplorata fatta eccezione per il problema dell'*albero di cardinalità k* (vedasi [1] e [2]). La tesi affronta un nuovo problema di questa classe avente applicazioni nel disegno di circuiti *VLSI* e nel calcolo parallelo: il problema del *taglio di cardinalità k*.

Dato un grafo non orientato con pesi sugli archi, il problema del *taglio di cardinalità k (k-card cut)* consiste nel trovare una partizione dell'insieme di vertici V in due insiemi V_1 e V_2 tale che il numero degli archi tra V_1 e V_2 sia esattamente k e la somma dei pesi di tali archi sia minima. Una variante di questo problema che viene pure considerata è il *k-card s-t cut* dove s e t sono due vertici assegnati e si ha la richiesta aggiuntiva che s e t appartengano a insiemi diversi della partizione. Vengono anche contemplate altre varianti nelle quali il numero degli archi del taglio è vincolato a essere non maggiore o non minore di k ($\leqslant$ *k-card cut* e $\geqslant$ *k-card cut*, rispettivamente).

Per la prima volta sono stati studiati gli aspetti più rilevanti di tutti questi problemi come la complessità computazionale, le formulazioni matematiche, le limitazioni inferiori della funzione obiettivo e gli algoritmi euristici alcuni dei quali con proprietà approssimante.

2. – Complessità dei problemi di taglio con vincoli di cardinalità.

Prima di decidere con quali metodi risolvere un *COP* è fondamentale studiarne la complessità computazionale, ossia confrontare la difficoltà del problema in questione con quella di problemi già noti. Infatti se in questa fase si prova che il problema è $\mathcal{NP}$*-difficile* allora non vi è alcuna speranza di determinare una soluzione esatta con un algoritmo polinomiale e perciò o ci si limita a trovare delle soluzioni euristiche in tempo polinomiale oppure si può ottenere una soluzione esatta solamente ricorrendo ad algoritmi che nel caso peggiore richiedono un tempo di calcolo esponenziale come ad esempio l'algoritmo di *Branch-and-Bound* o l'algoritmo dei *Piani di Taglio*.

TABELLA 1. – COMPLESSITÀ COMPUTAZIONALE DEL *k-card cut* e del $\geqslant$*k-card cut.*

Classe di grafo	Pesi uniformi	Pesi non uniformi
generale	*fortemente* $\mathcal{NP}$*-completo*	*fortemente* $\mathcal{NP}$*-completo*
completo	$\mathcal{P}$	*fortemente* $\mathcal{NP}$*-completo*
completo bipartito	$\mathcal{P}$	*fortemente* $\mathcal{NP}$*-completo*
albero	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$
griglia	$\mathcal{P}$	$\mathcal{R}p\mathcal{P}$
planare	$\mathcal{P}$	$\mathcal{R}p\mathcal{P}$

Abbiamo dimostrato che per grafi qualunque, anche con pesi uniformi sugli archi, tutti i problemi di taglio da noi considerati sono *fortemente* $\mathcal{NP}$*-completi* tranne il $\leqslant$ *k-card cut* che è risolvibile in tempo polinomiale se i pesi sono uniformi. Invece per grafi con pesi uniformi e dotati di particolare struttura come ad esempio grafi griglia, grafi completi, grafi completi bipartiti e grafi ad albero (in questo ultimo caso anche se i pesi sono non uniformi) tutti i problemi considerati sono risolvibili in tempo polinomiale.

La $\mathcal{NP}$*-completezza* del *k-card cut* si basa sulla riduzione polinomiale dal problema del taglio massimo (*max cut*), nel caso di grafi qualunque, e sulla riduzione polinomiale dall'*equicut*, nel caso di grafi completi con pesi non uniformi. Il caso dei grafi completi bipartiti con pesi non uniformi è ridotto da quello dei grafi completi.

Riassumiamo nella Tabella 1 i risultati di complessità ottenuti per il *k-card cut* e per il $\geqslant$*k-card cut*. In tale tabella $\mathcal{R}p\mathcal{P}$ denota la classe dei problemi di decisione che ammettono un algoritmo casuale polinomiale sotto assunzione di similarità.

3. – Metodi euristici.

Dato che nella maggior parte dei casi i problemi di taglio con vincoli di cardinalità si sono rivelati essere $\mathcal{NP}$*-completi* abbiamo sviluppato alcuni metodi euristici di risoluzione. Le euristiche sviluppate per grafi completi e grafi completi bi-

TABELLA 2. – COMPLESSITÀ DELLE EURISTICHE SVILUPPATE PER IL *k-card cut.*

Classe di grafo	Euristica	Complessità
completo	q-Greedy	$O\big(n^{q+1}(n-\sqrt{n^2-4k}-q)\big)$
completo	Stingy	$O(n^2 log(n))$
completo	Local	$O(k^2(\overline{w}-\underline{w}))$
completo bipartito	q_1, q_2-Greedy	$O\big(n_1^{q_1} n_2^{q_2}(n_1^2+n_2^2-n_1 q_1-n_2 q_2)\big)$
completo bipartito	Stingy	$O(n_1 n_2 log(n_1 n_2))$
completo bipartito	Local	$O\big(k(\overline{w}-\underline{w})(n_1^2+n_2^2)\big)$
generale	Greedy	$O(n^3 log(n))$

partiti garantiscono di trovare un taglio di cardinalità k minimizzando «per quanto possibile» la somma dei pesi degli archi del taglio. Le euristiche sviluppate per grafi qualunque non solo non possono garantire di trovare la soluzione ottima ma non possono neanche garantire di trovare una soluzione ammissibile, cioè un taglio di cardinalità k, perché come risulta dalla Tabella 1 questo problema è già di per sè fortemente $\mathcal{NP}$-*completo*.

Riassumiamo nella Tabella 2 i tipi di eurisitiche sviluppate con le rispettive complessità.

4. – Limitazioni inferiori.

Allo scopo di stimare la qualità delle soluzioni euristiche trovate abbiamo sviluppato metodi per determinare delle limitazioni inferiori della funzione obiettivo: minore è lo scarto tra il valore della soluzione euristica e la limitazione inferiore, migliore sarà la soluzione euristica trovata.

I metodi classici per generare limitazioni inferiori come ad esempio il rilassamento lineare ed il rilassamento lagrangiano si sono rivelati inefficaci per il *k-card cut*. In particolare il rilassamento lagrangiano del vincolo di cardinalità genera un problema di *max cut*, ossia un problema di difficoltà analoga al *k-card cut* nel caso di grafi qualunque. Questo tipo di rilassamento può perciò essere utilizzato soltanto per particolari tipi di grafo, come ad esempio i grafi planari o più in generale i grafi non contrattibili a K_5 (grafo completo di 5 vertici), per i quali *max cut* appartiene a $\mathcal{P}$.

Il metodo che invece ci ha fornito le migliori limitazioni inferiori e che è applicabile a qualunque tipo di grafo è stato il rilassamento di Programmazione Semidefinita (*SDP*). Tale metodo è stato adattato dal rilassamento *SDP* del *max cut* di M. X. Goemans e D. P. Williamson ([3]) semplicemente aggiungendo il vincolo di cardinalità del taglio. Inoltre esso è stato rafforzato aggiungendo le disuguaglianze triangolo proposte da S. Poljak e F. Rendl per il *max cut* in [5]. Il problema *SDP* così ottenuto è stato risolto utilizzando la libreria *CSDP* di B.Borchers (vedasi [4]).

5. – Un algoritmo 1.13822-approssimante per il *k-card cut*.

Applicando la tecnica degli iperpiani random descritta in [3] alla soluzione del rilassamento *SDP* del *k-card cut* abbiamo ottenuto un algoritmo di approssimazione per il *k-card cut*. In particolare abbiamo dimostrato che il valore atteso per le cardinalità dei tagli random, $E[card(cut)]$, risulta essere

$$\alpha \leq E[card(cut)] \leq \beta \tag{1}$$

mentre il valore atteso per i pesi dei tagli random, $E[w(cut)]$, risulta essere

$$E[w(cut)] \leqslant \beta w^* \tag{2}$$

dove $\alpha = 0.87856$, $\beta = 1.13822$ e w^* è il valore ottimo del *k-card cut*.

I risultati numerici mostrano che tra le soluzioni della euristica 1.13822-approssimante e quelle della euristica Greedy sviluppata per grafi qualunque non vi è alcuna relazione di dominanza sebbene la prima sia molto più costosa della seconda dal punto di vista computazionale. Inoltre lo scarto tra il valore della limitazione inferiore e il valore della migliore soluzione euristica trovata è molto spesso maggiore di zero anche per quelle istanze in cui il confronto con la soluzione ottima rivelava che la soluzione euristica trovata era ottima. Perciò questo ci indica che le limitazioni inferiori ottenute potrebbero essere ulteriormente rafforzate. A tale scopo si potrebbero ad esempio aggiungere delle disuguaglianze valide per il politopo del *k-card cut*. Uno studio approfondito del politopo del *k-card cut* potrebbe essere quindi una futura direzione di ricerca.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. Fischetti, H. W. Hamacher, K. Joernsten and F. Maffioli, *Weighted k-cardinality trees: complexity and polyhedral structure*, Networks, **24** (1994), 11-21.

[2] M. Ehrgott, H. W. Hamacher, J. Freitag and F. Maffioli, *Heuristic for the k-cardinality tree and subgraph problems*, Asia-Pacific journal of operation research, **14** (1997), 87-114.

[3] M. X. Goemans and D. P. Williamson, *Improved approximation algorithms for maximum cut and satisfability problems using semidefinite programming*, Journal of the Association for Computing Machinery, **42** (1995), 1115-1145.

[4] B. Borchers, *CSDP, a C library for semidefinite programming*, Optimization Methods and Software, **11** (1999), 613-623

[5] S. Poljak and F. Rendl, *Nonpolyhedral relaxations of graph-bisection problems*, SIAM Journal on Optimization, **5** (1995), 467-487.

Dipartimento di Matematica «F. Enriques», Università di Milano
e-mail: bruglier@elet.polimi.it
Dottorato in Matematica Computazionale e Ricerca Operativa
(sede amministrativa: Milano) - Ciclo XIII
Relatore: Prof. Francesco Maffioli DEI - Politecnico di Milano
Correlatore: Dr. Matthias Ehrgott, Department of Engineering Science, University of Auckland