Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Paola Cappanera

Localizzazione di impianti e instradamento di materiali nocivi: il caso discreto

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **4-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2001), n.3 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 419–422.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2001_8_4A_3_419_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2001.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. IV-A, Dicembre 2001, 419-422

Localizzazione di impianti e instradamento di materiali nocivi: il caso discreto.

Paola Cappanera

1. – Il problema di Obnoxious Facility Location e Routing.

I problemi di *Obnoxious Facilities Location* sono problemi in cui, diversamente da quanto avviene nei modelli di *Facilities Location* classici, gli utenti non considerano attrattive le facilities da localizzare, ma tentano di evitarle e di starne il più lontano possibile. Tipiche applicazioni sono la localizzazione ottima di discariche, inceneritori, impianti industriali che producono come residui di lavorazione sostanze tossiche e inquinanti, reattori nucleari, elettrodotti e così via.

Generalmente un impianto che arreca disturbo a centri abitati e all'ambiente, è l'origine o la destinazione di un flusso di materiale nocivo; le decisioni relative alla localizzazione delle facilities e alla logistica dei trasporti sono quindi strettamente correlate nell'ambito dei sistemi di gestione di materiali nocivi o pericolosi; è stato quindi definito un modello di location e routing combinati. Ci sono poi delle situazioni in cui l'aspetto legato al trasporto prevale sull'aspetto di localizzazione: si pensi ad esempio al caso degli elettrodotti, in cui il disturbo è principalmente dovuto al campo elettromagnetico che l'elettricità induce passando attraverso la rete. Attualmente l'inquinamento elettromagnetico viene percepito come un rischio reale e l'installazione di un elettrodotto solleva rapidamente l'opinione pubblica. Il problema studiato corriponde quindi a situazioni in cui degli impianti inquinanti devono essere aperti in località scelte a partire da un insieme di luoghi candidati (caso discreto) e materiali nocivi devono essere trasportati attraverso una rete. Si tratta di problemi significativi della nostra società dato il rapido sviluppo industriale e l'interesse crescente negli aspetti ambientali che caratterizzano i nostri tempi. La ricerca su tali problemi è relativamente recente e come evidenziato in [2] e [3] modelli e metodi risolutivi adeguati devono ancora essere messi a punto.

2. – Il metodo risolutivo.

Quando si affrontano problemi difficili, di grandi dimensioni, come il probema di location e routing descritto nella sezione precedente, è molto importante analizzarne la struttura e studiare metodi risolutivi che mirino ad esplorarne le caratteristiche. Nel nostro caso ciò è stato ottenuto grazie a tecniche lagrangiane che hanno fornito limitazioni sia inferiori che superiori per il problema studiato. È stato inoltre definito un efficace algoritmo di enumerazione implicita con l'obiettivo di ridurre rapidamente il divario tra limitazioni inferiore e superiore.

Tra gli aspetti che rendono efficace un metodo di enumerazione implicita, i seguenti sembrano essere particolarmente importanti: (i) incoraggiare il fluire di informazioni da un nodo all'altro dell'albero di enumerazione: nel risolvere il sottoproblema associato ad un nodo dell'albero, le informazioni dovrebbero essere raccolte in modo tale da essere successivamente filtrate e passate al successivo sottoproblema se ancora valide; (ii) ottenere una soluzione (frazionaria) ottima del sottoproblema corrente in modo tale da poter identificare la successiva variabile su cui fare un operazione di *branch*.

Il metodo proposto può essere applicato ad un qualunque problema di programmazione intera mista della forma:

$$(P) \quad \min\{cx + fy : Ax \leqslant b,\, Dy \leqslant e,\, Gx + Hy \leqslant l,\, y \in \{0, 1\}^n,\, x \in R^m\},$$

dove x e y sono rispettivamente le variabili continue e decisionali, A, D, G, H sono le matrici di coefficienti e c, f, b, e, l sono vettori di dimensione opportuna.

Al fine di ottenere una limitazione inferiore si considera il rilassamento lagrangiano rispetto ai vincoli $Gx + Hy \leqslant l$ che legano tra loro le variabili x e y. Il problema P si decompone quindi in due sottoproblemi, uno nelle sole variabili decisionali y, l'altro nelle variabili continue x. Dato un vettore non negativo λ, il rilassamento lagrangiano sopra descritto, consiste nel valutare la funzione separabile (poliedrica, concava, non differenziabile) $\varphi()$ in λ, cioè

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda) &= \min\{cx + fy + \lambda(Gx + Hy - l) : Ax \leqslant b,\, Dy \leqslant e,\, y \in \{0, 1\}^n,\, x \in R^m\}\\ &= \min\{(f + \lambda H)\, y : Dy \leqslant e,\, y \in \{0, 1\}^n\} +\\ &= \min\{(c + \lambda G)\, x : Ax \leqslant b,\, x \in R^m\} - \lambda l\end{aligned}$$

e $g = Gx + Hy - l$ è un sottogradiente per $\varphi()$ in λ dove x e y sono le soluzioni ottime dei sottoproblemi per il vettore λ dato.

Si dimostra poi che il duale lagrangiano $\max_{\lambda \geqslant 0} \varphi(\lambda)$, è equivalente al problema

$$(\overline{P}) \quad \min\{cx + fy : (x, y) \in \{Gx + Hy \leqslant l \cap \operatorname{conv}\{Ax \leqslant b, Dy \leqslant e, y \in \{0,1\}^n, x \in R^m\}\},$$

che risulta essere più forte del rilassamento continuo di P.

Per la risoluzione del duale lagrangiano è stato usato un algoritmo iterativo di tipo *bundle* in cui, diversamente da quanto avviene in un classico metodo del sottogradiente, le informazioni (sottogradienti) raccolte nelle varie iterazioni, vengono mantenue per guidare la ricerca verso l'ottimalità. Un tale metodo sembra infatti più adatto di un metodo del sottogradiente, per realizzare un algoritmo di enumerazione implicita che abbia le caratteristiche sopra descritte, poiché consente di:

1. sfruttare le informazioni raccolte ad ogni iterazione
2. ottenere una soluzione ottima di $\overline{P}$.

Per ulteriori dettagli sul metodo bundle si rimanda il lettore a [4].

Disponendo di una soluzione ottima del rilassamento lagrangiano, un modo naturale per ottenere limitazioni superiori è dato dalle euristiche lagrangiane, la cui idea fondamentale consiste nell'utilizzare la soluzione ottima di uno dei due sottoproblemi in cui il problema originale è stato decomposto, per ottenere una soluzione ammissibile per P.

A partire dalle limitazioni inferiore e superiore, sopra descritte, è stato definito un algoritmo di enumerazione implicita. L'operazione di branch è effettuata sulle variabili binarie e, ad ogni nodo dell'albero, la scelta della variabile è guidata sia dalla soluzione ottima del problema $\overline{P}$, che dai moltiplicatori lagrangiani ottimi.

Vediamo ora come le informazioni raccolte esplorando l'albero di enumerazione, vengono sfruttate per risolvere efficientemente i sottoproblemi relativi a nodi ancora da esplorare. Indichiamo con g^i il sottogradiente calcolato all'iterazione i e con (y^i, x^i) la corrispondente soluzione. Secondo la teoria degli ε-sottogradienti, un sottogradiente $g(\lambda)$ per $\varphi()$ in λ è anche un ε-sottogradiente per $\varphi()$ in un altro punto del dominio di $\varphi()$, per un appropriato valore di ε. È quindi possibile trasferire informazione (sottogradienti) da un nodo all'altro dell'albero di enumerazione, come la seguente proposizione mostra.

PROPOSIZIONE 1. – *Siano j e B rispettivamente l'indice della variabile di branch e l'insieme dei sottogradienti, calcolati al nodo corrente. Si ha che*

$$B^0 = \{g^i \in B : y_j^i = 0,\, Gx^i + Hy^i \leqslant l\}$$

è un insieme di sottogradienti validi per il sottoproblema ottenuto da quello corrente fissando la variabile y_j a zero, mentre

$$B^1 = \{g^i \in B : y_j^i = 1,\, Gx^i + Hy^i \leqslant l\}$$

è un insieme di sottogradienti validi per il sottoproblema ottenuto fissando y_j a uno.

Qualora risolvere (una serie di) problemi di programmazione intera ad ogni nodo dell'albero di enumerazione risultasse computazionalmente pesante, potrebbero essere usate strategie alternative per la determinazione dei bound: in situazioni di questo tipo è preferibile usare limitazioni inferiori più deboli che possono essere ottenute risolvendo un rilassamento del sottoproblema decisionale anziché il sottoproblema stesso. In questo caso risulta particolarmente importante risolvere il problema decisionale in modo euristico, poiché le soluzioni approssimate possono essere utilizzate per un duplice obiettivo: sia come punti di partenza per l'euristica lagrangiana, sia per arricchire l'insieme delle informazioni ad ogni nodo. A partire da tali soluzioni si possono infatti determinare nuovi sottogradienti, come la proposizione sotto mostra.

PROPOSIZIONE 2. – *Sia λ il vettore corrente dei moltiplicatori lagrangiani e sia (y, x) la corrispondente soluzione primale. Siano poi $\{y^1, \ldots, y^K\}$ un insieme di soluzioni approssimate per il problema decisionale per un dato λ. Per ogni k, (y^k, x) è una soluzione approssimata per $\varphi()$ in λ, di costo $\varphi^k(\lambda)$ e $g^k = Gx + Hy^k - l$ è un α^k-sottogradiente di $\varphi()$ in λ con $\alpha^k = \varphi^k(\lambda) - \varphi(\lambda)$.*

Per il problema di location e routing definito nella sezione precedente, il problema decisionale o problema di location è un problema di *Zaino Multidimensionale 0-1* per cui sono state studiate limitazioni sia inferiori che superiori, basate rispettivamente su tecniche euristiche di tipo *tabu search* e su rilassamenti surrogati; il problema continuo o problema di routing, invece, è un problema di programmazione lineare. Dato un vettore di moltiplicatori λ i sottoproblemi di location e routing sono solo debolmente correlati, e sono state quindi identificate opportune disuguaglianze valide al fine di rafforzarli. Ciò ha condotto anche allo studio di un caso particolare del problema di zaino multidimensionale, in cui compaiono anche vincoli di domanda oltre a quelli classici di capacità. Questo problema è interessante perché appare come sottoproblema di numerose applicazioni pratiche (obnoxious e semi-obnoxious facility location, capital budgeting e portfolio selection) e perché mostra una complessa struttura combinatoria, oltre ad essere molto difficile da risolvere anche per i più sofisticati risolutori commerciali. I risultati computazionali ottenuti sul problema di location e routing sembrano incoraggianti e sembrano mostrare che il metodo proposto può essere utilizzato con successo per trovare rapidamente soluzioni di buona qualità.

3. – Risultati ottenuti.

I principali contributi della tesi [1] consistono nell'aver formulato e studiato vari modelli di Obnoxious Facilities Location discreti; nell'aver proposto un nuovo modello di location e routing combinati, che si adatta a molte situazioni reali e infine nell'aver definito e sperimentato un metodo risolutivo che combina tecniche lagrangiane, tecniche di tipo bundle e tecniche di enumerazione implicita e che può essere utilizzato per la risoluzione di molti problemi di programmazione intera mista.

BIBLIOGRAFIA

[1] Cappanera P., *Discrete facility location and routing of obnoxious activities,* PhD. Thesis, Università degli Studi di Milano (2000).
[2] Drezner Z., *Facility location, a survey of applications and methods,* Springer Series in Operations Research (1995).
[3] Erkut E. and Neuman S., *Analytical models for locating undesirable facilities,* European Journal of Operational Research, **40** (1989), 275-291.
[4] Frangioni A. and Gallo G., *A bundle type dual-ascent approach to linear multicommodity min cost flow problems,* INFORMS JOC, **11** (1999), 370-393.

Dipartimento di Informatica, Università di Pisa
e-mail: cappaner@di.unipi.it
Dottorato in Matematica Computazionale e Ricerca Operativa
(sede amministrativa: Milano) - Ciclo XII
Direttore di ricerca: Prof. F. Maffioli, Politecnico di Milano
Correlatore: Prof. G. Gallo, Università di Pisa