Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Francesco Chiacchio

Risultati di esistenza, regolarità e confronto per equazioni ellittiche

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **4-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2001), n.3 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 423–426.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2001_8_4A_3_423_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2001.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. IV-A, Dicembre 2001, 423-426

Risultati di esistenza, regolarità e confronto per equazioni ellittiche.

FRANCESCO CHIACCHIO

L'oggetto della tesi è lo studio di una classe di equazioni ellittiche il cui prototipo è il seguente

$$\begin{cases} -\Delta u = |Du|^2 + f & \text{in } \mathcal{D}'(\Omega) \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{1}$$

Equazioni del tipo (1) si incontrano in vari contesti: problemi di controllo stocastico; equazioni di curvatura media e capillarità, equazioni di mappe armoniche su varietà di Riemann. Inoltre problemi del tipo (1) sono introdotti per risolvere le equazioni di Hamilton-Jacobi attraverso le soluzioni di viscosità.

Più in generale sono state considerate equazioni del seguente tipo

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x, u, Du)) = H(x, u, Du) + f & \text{in } \mathcal{D}'(\Omega) \\ u \in W_0^{1,p}(\Omega), \end{cases} \tag{2}$$

dove Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$, $-\operatorname{div}(a(x, u, Du))$ è un operatore di tipo Leray-Lions tra $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $W^{1,p'}(\Omega)$, infine $H(x, u, Du)$ è un termine che cresce al più come $|Du|^p$ rispetto a Du.

In letteratura esistono vari risultati di esistenza per problemi del tipo (2) sotto diverse ipotesi su $a(x, u, Du)$, $H(x, u, Du)$ ed f. In genere si impone o una condizione di struttura su H (del tipo $H(x, s, \xi)s \leq 0$) oppure una condizione piccolezza sulla norma di f in un opportuno spazio. Per esempio in [6] si prova che il problema (1) ammette almeno una soluzione in $W_0^{1,p}(\Omega)$, con $1 < p < N$, se $\|f\|_{L^{N/p}(\Omega)}$ è più piccola di una costante che dipende dai dati del problema. Nella tesi viene ottenuto un risultato analogo quando $p = N$ ed in questo caso, che può essere considerato limite, lo spazio naturale per f è lo spazio di Zygmund $L(\log L)^{N-1}$. Si prova quindi che se la norma di f in tale spazio è sufficientemente piccola allora il problema (1) ammette almeno una soluzione u (in generale non limitata) che tuttavia risulta più regolare che $W_0^{1,N}(\Omega)$. Si verifica infatti che u soddisfa la condizione seguente

$$(e^{c|u|} - 1)\, sign(u) \in W_0^{1,N}(\Omega), \tag{3}$$

dove c è una costante che dipende dai dati del problema.

La dimostrazione segue i metodi classici del calcolo delle variazioni. Il primo passo consiste nell'approssimare il problema dato con un'opportuna successione di problemi approssimanti P_n che ammettono una soluzione u_n in $W_0^{1,N}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Ciò consente di utilizzare in P_n una funzione test non lineare e, grazie all'ipotesi di piccolezza su f, si ottiene una stima a priori per u_n in $W_0^{1,N}(\Omega)$. Infine si provano proprietà di compattezza per la successione di soluzioni approssimate in maniera tale da poter passare al limite nel problema (la convergenza forte di u_n in $W_0^{1,N}(\Omega)$ è necessaria poichè $H(x, u, Du)$ ha crescita massima in $|Du|$).

Ci si è poi occupati di questioni di regolarità per problemi del tipo (1). È semplice provare che le soluzioni limitate di (1), quando per esempio f è in $W^{-1,r}(\Omega)$ con $r > \dfrac{N}{p-1}$, sono pure hölder continue. Nella tesi, utilizzando le classi di De Giorgi, viene provato che se $f \in L^{\frac{N}{p}+\varepsilon}(\Omega)$, con $\varepsilon > 0$ e $1 < p \leqslant N$, allora ogni soluzione di (1) che verifica una condizione del tipo (3) è hölder continua. Lo stesso poi si prova per le disequazioni variazionali.

Un'altra questione tipica sulle equazioni alle derivate parziali è quella di stabilire un risultato di confronto tra la soluzione di un problema dato e quella di uno caratterizzato da una qualche sorta di simmetria (che in genere può essere calcolata esplicitamente). Questo tipo di risultati, che originano dai classici lavori di Weinberger, Maz'ja, e Talenti sul caso lineare, consentono di trovare stime precise per le soluzioni. In particolare i lavori di Talenti hanno portato ad un gran numero di generalizzazioni ed in essi si fa uso della simmetrizzazione di Schwarz che trasforma una funzione positiva mutandone gli insiemi di livello in sfere di uguale misura centrate nell'origine. Di più recente applicazione alle equazioni ellittiche è la simmetrizzazione di Steiner che in breve consiste nell'applicare la simmetrizzazione di Schwarz solo ad un gruppo di variabili. Con tale procedimento si possono ottenere stime più precise rispetto a quelle ottenute con la simmetrizzazione di Schwarz per le soluzioni di problemi i cui dati siano caratterizzati da una simmetria parziale: rispetto ad un asse, un piano o a un gruppo di variabili.

Più precisamente se $G = G' \times G''$ è un aperto, limitato e connesso di $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ e se u funzione continua definita in G; denotato con (x, y) il generico punto di G, per ogni fissato $y \in G''$, si può considerare il riordinamento decrescente della funzione $u(\cdot, y)$: $x \to u(x, y) \in \mathbb{R}$, cioè [1]

$$u^*(s, y) = \sup\{t \geqslant 0 : \mu(t, y) \geqslant s\} \qquad s \in [0, |G'|_n], \tag{4}$$

dove $\mu(t, y) = |\{x \in G' : |u(x, y)| > t\}|_n$, con $t \geqslant 0$, è la funzione di distribuzione di $u(\cdot, y)$. Il riordinamento di Steiner di u, rispetto a x, è la funzione $u^{\#}(x, y)$ definita come segue

$$u^{\#}(x, y) = u^*(\omega_n |x|^n, y), \tag{5}$$

con $(x, y) \in G^{\#} = B \times G''$, dove B la sfera di $\mathbb{R}^n$ di centro l'origine e misura pari a $|G'|_n$.

[1] Con $|E|_n$ noi indicheremo la misura di Lebesgue di un sottoinsieme misurabile E of $\mathbb{R}^n$.

Per quanto riguarda le equazioni ellittiche non lineari con crescita naturale nel gradiente in [2] si stabilisce un risultato di confronto per un'equazione del tipo (1) utilizzando la simmetrizzazione di Schwarz mentre risultati analoghi con la simmetrizzazione di Steiner non sono noti in letteratura. È naturale però affrontare preliminarmente la questione per i problemi lineari infatti il più semplice problema non lineare con crescita naturale nel gradiente

$$\begin{cases} -\Delta u = |Du|^2 + f \quad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega) \\ u \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \tag{6}$$

con la trasformazione standard $w = e^u - 1$, si riduce ad un problema lineare

$$\begin{cases} -\Delta v - fv = f \quad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega) \\ v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{7}$$

I primi risultati in questa direzione sono contenuti in [1] dove è considerata una classe di equazioni ellittiche lineari il cui modello è

$$\begin{cases} -\Delta v = f \quad \text{in } \mathcal{D}'(G) \\ v \in H_0^1(G). \end{cases} \tag{8}$$

In particolare si prova che sussiste la seguente disuguaglianza

$$\int_0^s u^*(\sigma, y)\, d\sigma \leq \int_0^s v^*(\sigma, y)\, d\sigma \qquad \forall s \in [0, |G'|_n], \tag{9}$$

dove u è la soluzione di (8) and v è la soluzione di un problema i cui dati sono simmetrizzati nel senso di Steiner

$$\begin{cases} -\Delta v = f^\# \quad \text{in } \mathcal{D}'(G^\#) \\ v \in H_0^1(G^\#). \end{cases} \tag{10}$$

Nella tesi si considera il caso in cui l'equazione contiene termini di ordine inferiore

$$\begin{cases} -\Delta u - \sum\limits_{i=1}^n (b_i(y)\, u)_{x_i} - \sum\limits_{j=1}^m \left(\tilde{b}_j(y)\, u\right)_{y_j} + \\ + \sum\limits_{i=1}^n d_i(y)\, u_{x_i} + \sum\limits_{j=1}^n \tilde{d}_j(y)\, u_{y_j} + c(y)\, u = f(x, y) \ \text{ in } G \\ u = 0 \ \text{ su } \partial G. \end{cases} \tag{11}$$

Tra l'altro si prova un risultato del tipo (9), dove v risolve un opportuno problema simmetrizzato nel senso di Steiner.

L'idea della dimostrazione è quella di integrare l'equazione (11), una volta che

y è fissato in G'' , su l'insieme $\{x \in G' : u(x, y) > t\}$, ottenendo una disequazione differenziale per la funzione

$$U(s, y) \equiv \int_0^s u^*(\sigma, y)\, d\sigma\, d\sigma. \tag{12}$$

Si procede allo stesso modo per il problema simmetrizzato, integrandolo sui sopralivelli della sua soluzione v. Si ottiene quindi, invece della disuguaglianza ottenuta per U, una equazione differenziale che coinvolge la funzione

$$V(s, y) \equiv \int_0^s v^*(\sigma, y)\, d\sigma\, d\sigma\,. \tag{13}$$

Infine applicando il principio del massimo alla disequazione soddisfatta da $Z = U - V$ si ottiene $Z \leqslant 0$ in $[0, |G'|_n] \times G''$, cioè la (9).

BIBLIOGRAFIA

[1] Alvino A., Diaz J. I., Lions P. L., Trombetti G, *Elliptic equations and Steiner Symmetrization*, Comm. on Pure and Appl. Math, **XLIX** (1996), 217-236.
[2] Alvino A., Lions P. L., Trombetti G., *Comparison results for elliptic and parabolic equations via Schwarz symmetrization*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, **7** (1990), 37-65.
[3] Chiacchio F., *An existence result for a nonlinear problem in a limit case*, Le Matematiche, **LIII** (1998), 293-304.
[4] Chiacchio F., *Regularity for solutions of nonlinear elliptic equations with natural growth in the gradient*, Bulletin des Sciences Mathèmatiques, **124** (2000), 57-74.
[5] Chiacchio F., Monetti V. M., *Comparison results for solutions of elliptic problems via Steiner symmetrization*, Differential and Integral Equations.
[6] Ferone V., Murat F., *Nonlinear problems having natural growth in the gradient: an existence result when the source term is small*, Nonlinear Analysis T.M.A., **42** (2000), 1309-1326.

Dipartimento di matematica e applicazioni «R. Caccioppoli»
Università degli studi di Napoli «Federico II»
e-mail: francesco.chiacchio@dma.unina.it
Dottorato in Matematica Applicata ed Informatica
(sede amministrativa: Napoli) - Ciclo XII
Direttore di ricerca: Prof. Angelo Alvino, Università di Napoli