# Bollettino Unione Matematica Italiana

*Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura*



Adriana Ciampella


## Operazioni di Steenrod e teoria degli invarianti modulari per i primi dispari


*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8*, Vol. **4-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2001), n.3 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 427–430.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2001_8_4A_3_427_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2001.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. IV-A, Dicembre 2001, 427-430

# Operazioni di Steenrod e teoria degli invarianti modulari per i primi dispari.

Adriana Ciampella

Il lavoro svolto in questa tesi riguarda alcune relazioni tra la teoria delle operazioni coomologiche e la teoria degli invarianti. In generale, le operazioni coomologiche relative ad una teoria coomologica $k^*$ sono trasformazioni naturali di funtori contravarianti $k^*(-)$. Esse formano un'algebra che agisce sull'anello di coomologia $k^*(X)$ di uno spazio topologico $X$, arricchendone pertanto la struttura. La teoria degli invarianti riguarda l'azione di gruppi su anelli e i sottoanelli fissati dall'azione. Si parla di teoria degli invarianti modulari quando i gruppi che agiscono sono gruppi di automorfismi di spazi vettoriali su campi finiti. Le operazioni coomologiche stabili per la teoria coomologica ordinaria ridotta $H^*$ a coefficienti in $\mathbb{F}_p$ costituiscono l'algebra di Steenrod $\mathcal{A}_p$ modulo l'intero primo $p$. Quest'ultima si è rivelata particolarmente interessante in vari contesti nell'ambito della topologia algebrica. In questo lavoro l'interesse è rivolto al ben noto problema del calcolo di $\mathrm{Ext}^{s,t}_{\mathcal{A}_p}(\mathbb{Z}/p, \mathbb{Z}/p)$, la coomologia di $\mathcal{A}_p$: essa costitusce il termine $E_2$ della successione spettrale di Adams che converge alla $p$-componente del gruppo di omotopia stabile delle sfere. Lo studio delle possibili basi lineari di $\mathcal{A}_p$ è legato al suddetto problema, in quanto si potrebbe trovare qualche base che abbia proprietà utili per ottenere informazioni sulla coomologia di $\mathcal{A}_p$. La relazione tra la teoria degli invarianti e quella delle operazioni coomologiche si evidenzia proprio quando si fissa una base in $\mathcal{A}_p$, come verrà illustrato tra breve. L'algebra di Steenrod è un'algebra associativa graduata su $\mathbb{F}_p$ generata dalle *potenze* $P^i$, $i \geq 0$, e dall'operatore di Bockstein $\beta$, soggetti alle relazioni di Adem e alle $P^0 = 1$, $\beta^2 = 0$. Tali generatori sono stati introdotti da Steenrod attraverso la cosiddetta *operazione potenza totale*,

$$T_1 \colon H^*(X) \to \Lambda_1 \otimes H^*(X),$$

dove, per ogni intero positivo $n$, $\Lambda_n$ denota l'anello di coomologia del $p$-gruppo abeliano elementare di rango $n$, $(\mathbb{Z}/p)^n$. L'espressione algebrica della valutazione di $T_1$ su una classe di coomologia $u \in H^q(X)$, è la seguente:

$$T_1(u) = \mu(q) \sum_{i,\, \varepsilon} (-1)^{\varepsilon + i} x_1^{\varepsilon} y_1^{(q-2i)h - \varepsilon} \otimes \beta^{\varepsilon} P^i(u),$$

in cui $\varepsilon \in \{0, 1\}$, $h = (p-1)/2$, $\mu(q) = (h!)^q(-1)^{hq(q-1)/2}$, $i \geq 0$. Iterando $T_1$ $n$ volte, si ottiene l'omomorfismo

$$T_n \colon H^*(X) \to \Lambda_n \otimes H^*(X),$$

noto come operazione potenza totale *iterata*. Esso moltiplica il grado di una classe coomologica per $p^n$. Dalla costruzione geometrica di $T_n$ risulta che la sua immagine è contenuta in $(\Lambda_n)^{\widetilde{SL}_n} \otimes H^*(X)$, dove $\widetilde{SL}_n$ denota il sottogruppo del gruppo generale lineare $GL_n$ di ordine $n$ a elementi in $\mathbb{F}_p$, costituito dalle matrici $w$ tali che $(\det w)^{(p-1)/2} = 1$, e la scrittura $\Lambda_n^{\widetilde{SL}_n}$ indica l'algebra degli elementi di $\Lambda_n$ fissati da $\widetilde{SL}_n$. L'espressione algebrica di $T_n$ che si ottiene applicando ripetutamente $T_1$ è del tipo

$$T_n(-) = \sum_{\theta \in \mathcal{A}_p} g(\theta) \otimes \theta(-),$$

ma, in questa forma, non è evidente che i coefficienti $g(\theta)$ appartenenti a $\Lambda_n$ sono $\widetilde{SL}_n$-invarianti. L'invarianza diventa esplicita quando si fissa una base $\mathcal{B}$ in $\mathcal{A}_p$ e si scrivono le operazioni $\theta$ come combinazione lineare degli elementi di questa base, vale a dire se $T_n$ è posto nella forma

$$T_n(-) = \sum_{b \in \mathcal{B}} f(b) \otimes b(-).$$

In tal caso, i coefficienti $f(b)$ appartengono a $\Lambda_n^{\widetilde{SL}_n}$. Il calcolo di $T_n$ su una classe $u \in H^*(X)$, eseguito iterando $n$ volte $T_1$, richiede la conoscenza dell'azione di tutte le operazioni di Steenrod su quella classe di coomologia. Il calcolo si semplifica se si usa l'espressione di $T_n$ in termini di una base $\mathcal{B}$, in quanto è necessario conoscere solo l'azione su $u$ delle operazioni in $\mathcal{B}$ Per la base di Milnor, i coefficienti $f(b)$ sono stati determinati da Mùi [4]; in questo lavoro si considera invece la base dei monomi ammissibili. Il risultato di Mùi può essere interpretato anche come una risposta alla richiesta di determinare le operazioni coomologiche corrispondenti agli invarianti di Dickson. Mùi dimostra che tali operazioni sono proprio quelle della base di Milnor. Viceversa, ci si può chiedere quali siano gli invarianti corrispondenti alle operazioni di una base fissata di $\mathcal{A}_p$, per esempio la base degli ammissibili. Il Teorema principale in [2] risponde parzialmente a questa domanda, in quanto fornisce l'espressione dei coefficienti $f(b)$ per $n = 2$; equivalentemente, descrive gli invarianti corrispondenti ai monomi ammissibili di lunghezza 2.

Il lavoro si apre con l'introduzione dell'algebra di Steenrod, prima da un punto di vista assiomatico, poi dandone una costruzione geometrica, necessaria per comprendere il legame tra l'algebra di Steenrod e la teoria degli invarianti. Nella interpretazione geometrica delle operazioni di Steenrod risiede anche il motivo della differenza tra il caso $p = 2$ e il caso $p$ primo dispari: i coefficienti $f(b)$ sono $GL_n$-invarianti e $\widetilde{SL}_n$-invarianti rispettivamente nei due casi.

Successivamente viene fornita un'altra costruzione geometrica delle operazioni di Steenrod, realizzata nella categoria degli *spettri*, i cui oggetti si costruiscono a partire da spazi topologici. Essi sono necessari per dare una interpretazione geometrica dell'operazione potenza totale *normalizzata* e della sua iterata $S_n$, poiché la sua costruzione richiede un procedimento chiamato *desospensione*, che ha senso se fatto nella categoria degli spettri, ma non lo ha in quella degli spazi topologici.

Segue la presentazione di alcuni risultati riguardanti la struttura delle algebre di invarianti di $\Lambda_n$ rispetto all'azione di $GL_n$ e di alcuni suoi sottogruppi notevoli, come il sottogruppo di Borel $B_n$, il sottogruppo unipotente $U_n$ e il sottogruppo di indice 2, $\widetilde{SL}_n$. Dickson fornisce un sistema fondamentale di $GL_n$-invarianti per le algebre polinomiali. La sua tecnica, basata sul calcolo di determinanti di particolari matrici aventi per elementi dei polinomi, è stata ripresa da Mùi per determinare sistemi di invarianti per tutta l'algebra $\Lambda_n$, prodotto tensore di un'algebra polinomiale con una esterna [5]. In questo caso, nel calcolo del determinante, bisogna tenere conto del diverso significato della commutatività per le algebre graduate. Si fornisce, inoltre, la struttura delle algebre di invarianti della localizzazione $\Phi_n$. Si prova poi che $\Phi_n^{U_n}$ può essere dotata di una struttura di coalgebra rispetto alla quale $\Phi_n^{GL_n}$ è una sua sottocoalgebra. Infine, si determinano un sistema $S_B$ di generatori di $\Phi_n^{B_n}$ e un sistema $S_U$ di generatori per $\Phi_n^{U_n}$, che sembrano non essere mai stati descritti prima d'ora.

Utilizzando le principali proprietà dell'operazione totale iterata, si fornisce una descrizione di $T_n$ in termini di invarianti unipotenti di $\Phi_n$ [3]; precisamente, i coefficienti dell'espressione trovata per $T_n$ sono funzioni dei generatori dell'algebra $\mathcal{M}_n(p)$ immagine dell'omomorfismo restrizione indotto in coomologia dall'immersione di $(\mathbb{Z}/p)^n$ nell'$n$-esimo prodotto intrecciato iterato di $\mathbb{Z}/p$. Attraverso questa descrizione, considerando il sistema $S_B$ di generatori, si ottiene una formula elegante e compatta per $T_n$, e quindi per la sua versione normalizzata $S_n$. Questa espressione viene poi usata per provare il Teorema principale in [2]. Essa sembra essere la più semplice tra le varie formule per l'operazione totale iterata che si possono ottenere a seconda del gruppo di permutazioni che si sceglie nella costruzione di $T_n$.

Riguardo ai coefficienti dell'operazione totale iterata rispetto alla base degli ammissibili, vengono esaminati alcuni casi particolari e si osserva che l'espressione di $T_n$ si semplifica se ci si restringe alla categoria dei $CW$-complessi con celle solo in dimensione pari. Infatti, se $X$ appartiene a questa categoria e $u \in H^*(X)$, risulta $\beta(u) = 0$. Gli esempi riguardano lo spazio proiettivo complesso di dimensione infinita $\mathbb{C}P^\infty$.

Si fornisce inoltre una dimostrazione alternativa della versione normalizzata di un Teorema di Mùi [1]. L'operazione potenza totale iterata normalizzata $S_n$ è un omomorfismo che preserva il grado, per cui i corrispondenti in $S_n$ dei coefficienti $f(b)$ in $T_n$ appartengono all'algebra degli invarianti della localizzazione di $\Lambda_n$. È interessante notare che l'immagine di $T_n$ è $\widetilde{SL}_n$-invariante, mentre l'immagine di $S_n$ è $GL_n$-invariante. Questo potrebbe essere un motivo per preferire la normalizzata $S_n$ a $T_n$, ma attualmente non ci sono esempi concreti che giustifichino tale preferenza. La dimostrazione di cui si parla si basa sulla costruzione di una particolare successione di funzioni definite sull'algebra duale di $\mathcal{A}_p$, a valori nell'algebra degli invarianti di $\Phi_n$ rispetto all'azione del sottogruppo di Borel $B_n$.

Dal momento che le relazioni di Adem hanno rivestito un ruolo importante nel risultato sui coefficienti dell'operazione doppia iterata ([2]), si è ritenuto opportuno analizzare nei dettagli l'idea di Bullett e MacDonald sulla derivazione delle suddette relazioni. Essi propongono un metodo che dimostra come relazioni così articolate siano implicitamente contenute nell'identità di opportune serie di potenze.

## BIBLIOGRAFIA

[1] CIAMPELLA A., *Modular invariant theory and the iterated total power operation*, Bollettino U. M. I., (8) **3-B** (2000), 325-335.
[2] CIAMPELLA A., LOMONACO L. A., *On the double power operation*, in stampa su Ricerche di Matematica.
[3] CIAMPELLA A., *Cohomology operations and unipotent invariants*, in stampa su Ricerche di Matematica.
[4] MÙI H., *Cohomology operations derived from modular invariants*, Mathematische Zeitschrift, **193** (1986), 151-163.
[5] MÙI H., *Modular invariant theory and cohomology algebras of symmetric groups*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, **22** (1975), 319-369.

Dipartimento di Matematica, Università di Napoli
e-mail: ciampell@unina.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Napoli) - Ciclo XII
Direttore di ricerca: Prof. Luciano Lomonaco, Università di Napoli