BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

MARIA DE FALCO

Sui gruppi con molti sottogruppi subnormali

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **4-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2001), n.3 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 431–434.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2001_8_4A_3_431_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2001.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. IV-A, Dicembre 2001, 431-434

Sui gruppi con molti sottogruppi subnormali.

MARIA DE FALCO

Un sottogruppo H di un gruppo G si dice *subnormale* in G se esiste una serie finita di G contenente H e G; se H è un sottogruppo subnormale di G, la lunghezza minima di una tale serie si dice *difetto* di H in G. Dunque i sottogruppi normali sono i sottogruppi subnormali di difetto al più 1.

I gruppi in cui tutti i sottogruppi sono subnormali sono stati studiati da molti autori; in generale tali gruppi sono localmente nilpotenti, ma non è detto che siano nilpotenti (c'è in tal senso un esempio costruito da Heineken e Mohamed). Möhres ha provato che tali gruppi sono risolubili e recentemente Casolo e Smith hanno provato indipendentemente che nel caso in cui siano senza torsione essi sono nilpotenti; sussiste inoltre un risultato dovuto a Roseblade che assicura che un gruppo in cui tutti i sottogruppi siano subnormali con difetto limitato k è nilpotente e la sua classse di nilpotenza è limitata da una funzione di k. Vari autori hanno inoltre studiato gruppi che siano in qualche senso ricchi di sottogruppi subnormali.

Ogni gruppo supersolubile è nilpotente-per-finito, sicché possiede un sottogruppo normale e di indice finito i cui sottogruppi sono subnormali in G. Nella tesi vengono esaminate proprietà di gruppi ricchi di sottogruppi supersolubili generalizzati e di gruppi ricchi di quozienti supersolubili generalizzati.

Si ricordi che se $\mathfrak{X}$ è una classe di gruppi, si dice che un gruppo G è un gruppo *minimale non-*$\mathfrak{X}$ se tutti i suoi sottogruppi propri sono $\mathfrak{X}$-gruppi mentre G non è in $\mathfrak{X}$. I gruppi minimali non-supersolubile sono stati studiati da Huppert [8] e Doerk [5], nel caso finito, e da Franciosi e de Giovanni [7] nel caso infinito. Nella tesi si descrivono, in condizioni di risolubilità generalizzata, gruppi che verificano la condizione minimale sui sottogruppi non-supersolubili e gruppi in cui i sottogruppi non-supersolubili si distribuiscono in un numero finito di classi di coniugio. Si ottengono i seguenti risultati:

TEOREMA 1 (M. De Falco [1]). – *Sia G un gruppo localmente graduato che soddisfa la condizione minimale sui sottogruppi non-supersolubili. Allora G è supersolubile oppure è un gruppo di Černikov.*

TEOREMA 2 (M. De Falco [1]). – *Un gruppo G localmente graduato ha un numero finito di classi di coniugio di sottogruppi non-supersolubili se e solo se vale una delle seguenti condizioni:*

(1) *G è un gruppo finito.*

(2) *G un gruppo supersolubile.*

(3) *G contiene un sottogruppo normale P tale che P sia un gruppo di Prüfer e G/P sia un gruppo supersolubile finito.*

Si dice che un gruppo G è un *T-gruppo* se ogni suo sottogruppo subnormale è normale e che G è un $\overline{T}$*-gruppo* se tutti i suoi sottogruppi sono T-gruppi. In particolare, la struttura dei T-gruppi finiti e risolubili è stata descritta da Gaschütz, mentre Robinson ha studiato i T-gruppi risolubili infiniti. È chiaro che un T-gruppo risolubile possiede una serie normale ascendente i cui fattori sono ciclici (i.e. G è iperciclico); dunque un noto risultato di Baer assicura che un tale gruppo è localmente supersolubile. Si dice che un gruppo G è *parasolubile* se ha una serie normale finita

$$\{1\} = G_0 < G_1 < \ldots < G_t = G$$

a fattori abeliani tale che tutti i sottogruppi di G_{i+1}/G_i sono normali in G/G_i per ogni $i < t$. Chiaramente ogni gruppo parasolubile è iperciclico e quindi localmente supersolubile.

Nella tesi si analizzano, in ipotesi di risolubilità generalizzata, alcune classi di gruppi ricchi di T-sottogruppi e di sottogruppi parasolubili. I gruppi finiti minimali non-T sono supersolubili e sono stati caratterizzati da Robinson in [9], il quale ha anche provato che sotto opportune condizioni finitarie i gruppi minimali non-T sono finiti (e quindi supersolubili). Nella tesi si prova innanzitutto che un gruppo privo sezioni semplici infinite che sia minimale non-T è finito; si descrivono poi alcune classi di gruppi risolubili generalizzati ricchi di T-sottogruppi:

TEOREMA 3 (M. De Falco - F. de Giovanni, [3]). – *Sia G un gruppo privo di sezioni semplici infinite. Se G soddisfa la condizione minimale sui sottogruppi che non sono T-gruppi, allora G è un gruppo di Černikov oppure un* $\overline{T}$*-gruppo risolubile.*

TEOREMA 4 (M. De Falco - F. de Giovanni, [3]). – *Sia G un gruppo localmente risolubile con un numero finito di classi di coniugio di sottogruppi che non sono T-gruppi. Allora G è finito oppure è un* $\overline{T}$*-gruppo.*

Si ottengono poi risultati analoghi per una notevole classe di gruppi risolubili generalizzati in cui l'insieme dei sottogruppi non-parasolubili è sottoposto alle stesse restrizioni.

Sia $\mathfrak{X}$ una classe di gruppi. Si dice che un gruppo G è un *just-non-*$\mathfrak{X}$*-gruppo* se G non è in $\mathfrak{X}$ ma tutti i suoi quozienti propri sono $\mathfrak{X}$-gruppi. I gruppi risolubili just-non-supersolubile sono stati descritti da Robinson e Wilson in un articolo in cui studiano i gruppi just-non-policiclico. Nella tesi si fornisce una descrizione dei gruppi just-non-(supersolubile-per-finito) (in breve *JNSF*-gruppi). Si prova, in particolare, che se G è un *JNSF*-gruppo con sottogruppo di Fitting non-identico A, allora A è abeliano ed inoltre è senza torsione (in tal caso G si dice di *caratteristica* 0) oppure ha esponente p per qualche primo p (in tal caso G si dice di *caratteristica* p). Si ottengono i seguenti risultati:

TEOREMA 5 (M. De Falco [2]). – *Un gruppo* G *è un JNSF-gruppo di caratteristica* 0 *se e solo se contiene due sottogruppi non identici abeliani senza torsione* A *e* X *che verificano le seguenti condizioni:*

(a) A *è normale in* G *ed è un* G/A*-modulo fedele e just-infinito;*

(b) X *è finitamente generato;*

(c) $A \cap X = \{1\}$ *e il sottogruppo* AX *ha indice finito in* G.

TEOREMA 6 (M. De Falco [2]). – *Un gruppo* G *è un JNSF-gruppo di caratteristica prima* p *se e solo se contiene un sottogruppo normale* A *abeliano e di esponente* p *tale che* G/A *è un gruppo infinito supersolubile-per-finito e* A *è un* G/A*-modulo fedele e just-infinito.*

Poiché ogni gruppo nilpotente e finitamente generato è supersolubile, i gruppi supersolubili-per-finito sono tutti e soli i gruppi nilpotenti-per-finito e fnitamente generati. I gruppi risolubili just-non-nilpotente sono stati studiati da Franciosi e de Giovanni in [6]; qui si studiano i gruppi risolubili-per-finito just-non-(nilpotente-per-finito).

Un altro possibile approccio nello studio dei gruppi ricchi di sottogruppi che verificano una fissata proprietà consiste nell'imporre restrizioni di varia natura all'insieme dei sottogruppi che non la verificano: si può, ad esempio pensare a condizioni di catena oppure richiedere che tutti i sottogruppi non verificanti la proprietà soddisfino una data condizione. Franciosi e de Giovanni hanno studiato i gruppi in cui l'insieme dei sottogruppi non-subnormali verifica la condizione minimale e Kurdachenko e Smith hanno studiato i gruppi in cui tale insieme verifica la condizione massimale. Nella tesi si descrivono, in condizioni di risolubilità generalizzata, i gruppi in cui i sottogruppi non-subnormali sono anormali e i gruppi G in cui la chiusura normale dei sottogruppi non-subnormali coincide con G (cfr. [4]).

BIBLIOGRAFIA

[1] M. DE FALCO, *Groups satisfying the minimal condition on non-supersoluble subgroups*, Ricerche Mat., **48** (1999), 353-360.

[2] M. DE FALCO, *Groups whose proper quotients are nilpotent-by-finite*, Proc. Roy. Irish Acad., in corso di stampa.

[3] M. DE FALCO and F. DE GIOVANNI, *Groups with many subgroups having a transitive normality relation*, Bol. Soc. Bras. Mat., **31** (2000), 73-80.

[4] M. DE FALCO, L. A. KURDACHENKO and I. YA. SUBBOTIN, *Groups with only abnormal and subnormal subgroups*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, **46** (1998), 435-442.

[5] K. Doerk, *Minimal nicht überauflösbare endliche Gruppen*, Math. Z., **91** (1966), 198-205.
[6] S. Franciosi and F. de Giovanni, *Soluble groups with many nilpotent quotients*, Proc. Roy. Irish Acad., **89A** (1989), 43-52.
[7] S. Franciosi and F. de Giovanni, *Groups with many supersoluble subgroups*, Ricerche Mat., **40** (1991), 321-333.
[8] B. Huppert, *Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen*, Math. Z., **60** (1954), 409-434.
[9] D. J. S. Robinson, *Groups which are minimal with respect to normality being intransitive*, Pacific J. Math., **31** (1969), 777-785.
[10] D. J. S. Robinson and J. S. Wilson, *Soluble groups with many polycyclic quotients*, Proc. London Math. Soc. (3), **48** (1984), 193-229.

Dipartimento di Matematica e Applicazioni «R. Caccioppoli»,
Università degli Studi di Napoli Federico II,
e-mail: defalco@matna2.dma.unina.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Napoli Federico II) - Ciclo XII
Direttore di ricerca: Prof. Francesco de Giovanni