Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Tommaso de Fernex

Trasformazioni birazionali di ordine primo del piano proiettivo

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **4-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2001), n.3 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 435–438.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2001_8_4A_3_435_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2001.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. IV-A, Dicembre 2001, 435-438

Trasformazioni birazionali di ordine primo del piano proiettivo.

TOMMASO DE FERNEX

I primi risultati riguardanti le trasformazioni birazionali del piano proiettivo risalgono alla seconda metà dell'ottocento; ricordiamo qui tra gli altri i contributi di Cremona, M. Noether e Bertini. Nel 1895 S. Kantor pubblicò un libro sulla classificazione a meno di coniugio dei gruppi generati da tali trasformazioni [2]. Sebbene la lista di tali gruppi appare molto dettagliata, le dimostrazioni contenute in [2] sono piuttosto involute. Questioni correlate hanno trovano spazio nello studio dei piani multipli (Bottari, Castelnuovo and Enriques, e recentemente Calabri), e nella classificazione del gruppo di automorfismi di superfici cubiche e quartiche (B. Segre, Hosoh) nonché di generiche superfici razionali (Koitabashi).

Recentemente Bayle e Beauville hanno rivisitato e combinato questi argomenti, e dato una nuova ed elegante dimostrazione della classificazione delle involuzioni birazionali di $\mathbf{P}^2$ a meno di coniugio [1]. L'innovazione principale introdotta da Bayle e Beauville è l'uso della teoria di Mori. L'idea è semplice: risolvendo le singolarità dell'involuzione birazionale, essi si riconducono ad un problema di classificazione di automorfismi di ordine due di superfici razionali, che approcciano considerando la parte invariante del cono delle curve di Mori.

L'ispirazione alla base della tesi qui esposta venne dopo aver letto [1]. Ci siamo infatti proposti di estendere le nuove idee introdotte da Bayle e Beauville, in modo da ottenere la classificazione di tutte le trasformazioni birazionali di ordine primo di $\mathbf{P}^2$. Il primo passo è stato quello di dimostrare l'esistenza dell'adeguata risoluzione. Si noti che questo non è un fatto banale quando l'ordine della trasformazione è maggiore di due.

TEOREMA 1. – *Data una varietà algebrica proiettiva* Y *e un elemento* $\tau \in Bir(Y)$ di ordine finito, esistono una varietà algebrica proiettiva non singolare X e una mappa birazionale $f: X \to Y$ tali che $f^{-1}\tau f \in Aut(X)$.

La dimostrazione si basa sulla semplice osservazione che τ induce un'azione sul campo delle frazioni $K(Y)$, e un sistema di generatori della parte invariante di $K(Y)$ definisce una mappa razionale $\phi : Y \to \mathbf{P}^m$. Considerando la fattorizzazione di Stein $Y' \to X' \to \mathbf{P}^m$ di una risoluzione $\phi' : Y' \to \mathbf{P}^m$ di ϕ, si constata che X' è birazionale a Y e τ si solleva ad un automorfismo σ' di X'. X e σ sono quindi ottenuti mediante una risoluzione equivariante delle singolarità di X'. Nella tesi viene mostrato anche che, se Y è una superficie non singolare, X può essere realizata mediante lo scoppiamento di Y lungo l'unione degli schemi di indeteminazione delle mappe birazionali τ^k per $k = 1, \ldots, |\tau| - 1$. La dimostrazione di questo fatto usa il linguaggio di punti infinitamente vicini e una costruzione di ricorsive risoluzioni e sollevamenti di trasformazioni birazionali.

Il seguente risultato di classificazione costituisce il cuore della tesi.

TEOREMA 2. – *Sia X una superficie proiettiva non singolare definita su un campo algebricamente chiuso di caratteristica zero. Si supponga che il fibrato canonico di X non sia numericamente effettivo. Si supponga inoltre che X sia dotata di un automorfismo σ di ordine primo tale che i soli morfismi birazionali $f: X \to Y$, per cui Y sia non singolare e $f\sigma f^{-1}$ sia un automorfismo, siano gli automorfismi di X. Allora la coppia (X, σ) rientra in uno dei seguenti casi, nei quali qualsiasi valore di $|\sigma|$ può occorrere:*

1. $X = \mathbf{P}^2$ e $\sigma \in PGL(3)$;

2. X è una superficie geometricamente rigata e σ induce un automorfismo effettivo o sulla curva base oppure su ciascuna fibra; oppure $|\sigma| = 2$ e (X, σ) rientra in uno dei seguenti casi:

3. X è una fibrazione in coniche e σ induce un automorfismo effettivo su ciascuna fibra, scambiando le due componenti di ogni fibra singolare;

4. $X \cong \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ e σ inverte le due rigature di X;

5. X è una superficie di Del Pezzo di grado 2 e σ è l'involuzione di Geiser;

6. X è una superficie di Del Pezzo di grado 1 e σ è l'involuzione di Bertini; oppure $|\sigma| = 3$ e (X, σ) rientra in uno dei seguenti casi:

7. X è una superficie cubica di $\mathbf{P}^3$ definita da un'equazione della forma $x^3 = F(y, z, w)$, e σ è indotta dalla proiettività $(x, y, z, w) \to (\xi x, y, z, w)$, dove ξ è una radice cubica dell'unità;

8. X è una superficie sestica definita da un'equazione della forma $z^3 = F(x, y, w)$ nello spazio proiettivo pesato $\mathbf{P}(1, 1, 2, 3)$ con coordinate pesate (x, y, z, w), e σ è indotta dalla proiettività $(x, y, z, w) \to (x, y, \xi z, w)$, dove ξ è una radice cubica dell'unità; oppure $|\sigma| = 5$ e (X, σ) rientra in uno dei seguenti casi:

9. X è una superficie sestica definita da un'equazione della forma $xy^5 = F(x, z, w)$ nello spazio proiettivo pesato $\mathbf{P}(1, 1, 2, 3)$ con coordinate pesate (x, y, z, w), e σ è indotta dalla proiettività $(x, y, z, w) \to (x, \xi y, z, w)$, dove ξ è una radice quintupla dell'unità;

10. $X = Bl_\Sigma \mathbf{P}^2$, dove $\Sigma = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)\}$ in opportune coordinate (x, y, z) di $\mathbf{P}^2$, e σ è il sollevamento su X della trasformazione birazionale di $\mathbf{P}^2$ data da $(x, y, z) \to (x(z - y), z(x - y), xz)$.

Per completezza, abbiamo incluso nel Teorema 2 anche le involuzioni, che erano già state trattate in [1]. La nostra dimostrazione si basa su un argomento che non dipende dal particolare ordine (primo) di σ. Restringendoci al caso di ordine 2, essa fornisce un approccio alternativo a quello seguito da Bayle e Beauville.

Un teorema simile è stato dimostrato recentemente anche da Dolgachev e Zhang in [3]. Il comun denominatore tra il loro lavoro e il nostro è l'uso della teoria di Mori nello spirito di [1]. Per il resto i metodi utilizzati in [3] e qui sono piuttosto differenti. In [3] il risultato è ottenuto da due direzioni: l'approccio «top down», che fa uso della classificazione dei gruppi di Weyl, e l'approccio «bottom up», basato su un'analisi dettagliata delle superfici quozienti. Vorremmo segnalare che [3] non fornisce alcune informazioni necessarie per applicare il risultato alla classificazione delle trasformazioni birazionali di $\mathbf{P}^2$.

In due successivi teoremi contenuti nella tesi viene descritto e caratterizzato il ricoprimento ciclico $f: X \to X/\sigma$ per i casi 6-8 del Teorema 2. In particolare, per ognuno di questi casi viene fornito esplicitamente il sistema lineare che definisce la mappa quoziente f. Ciò ci permetterà in seguito di descrivere le trasformazioni birazionali di $\mathbf{P}^2$ che appariranno nella classificazione.

Prima di procedere con il presentare l'applicazione dei teoremi sopra esposti, vorremmo dare un breve cenno della dimostrazione del Teorema 2. Seguendo la strategia introdotta in [1], viene considerata la parte invariante $Pic(X)^\sigma$ del gruppo di Picard di X. Se questa ha rango maggiore di 1, possiamo applicare la teoria equivariante di Mori, ottenendo in questo modo i casi 2 e 3 del teorema. Più interessante è il caso in cui $Pic(X)^\sigma$ ha rango 1, poiché l'approccio utilizzato in [1], basandosi sull'analisi di riflessioni di reticoli, non si estende in modo naturale ai casi di ordine maggiore di 2. Nella tesi noi affrontiamo il problema da un punto di vista più geometrico, considerando le curve formate dalle orbite di (-1)-curve di X. Queste curve sono σ-invarianti. Un semplice conto di intersezione ci premette quindi di ridurre drasticamente le possibilibilità per la superficie X e l'ordine di σ. Lo studio dei pochi casi che si presentano si basa sull'analisi esplicita che σ induce sui sistemi pluri-anticanonici di X, tramite cui riusciamo a descrivere le mappe quozienti $f: X \to X/\sigma$ in temini di proiezioni lineari.

Si noti dunque come il metodo si basi su argomenti elementari di geometria proiettiva, e non si valga di altri risultati di classificazione (a parte quella delle superfici di Del Pezzo). Questo ci fa sperare che sia possibile estendere alcune delle idee introdotte nella dimostrazione del Teorema 2 allo studio di problemi analoghi in dimensione maggiore.

I Teoremi 1 e 2 vengono infine impiegati per classificare le trasformazioni birazionali di ordine primo di $\mathbf{P}^2$. A fianco delle ben note involuzioni birazionali di de Jonquières, Geiser e Bertini, vengono definite le seguenti trasformazioni di $\mathbf{P}^2$:

1. Per una scelta opportuna di un insieme $\Sigma \subset \mathbf{P}^2$ di 6 punti in posizione generale, esiste un sottosistema lineare di dimensione due $W \subset |\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(3) \otimes I_\Sigma|$ e una trasformazione birazionale τ di ordine 3 che assegna ad un generico punto $p \in \mathbf{P}^2$ uno dei due ulteriori punti base del sistema lineare $W I_p$.

2. Per una scelta opportuna di un insieme $\Sigma \subset \mathbf{P}^2$ di 8 punti in posizione ge-

nerale, esiste un sottosistema lineare di dimensione quattro $W \subset |\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(9) \otimes I_\Sigma^3|$ e una trasformazione birazionale τ di ordine 3 che assegna ad un generico punto $p \in \mathbf{P}^2$ uno dei due ulteriori punti base del sistema lineare $W \otimes I_p$.

3. Per una scelta opportuna di un insieme $\Sigma \subset \mathbf{P}^2$ di 8 punti in posizione generale, esiste un sottosistema lineare di dimensione cinque $W \subset |\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(15) \otimes I_\Sigma^5|$ e una trasformazione birazionale τ di ordine 5 che assegna ad un generico punto $p \in \mathbf{P}^2$ uno dei quattro ulteriori punti base del sistema lineare $W \otimes I_p$.

4. $\tau : (x, y, z) \to (x(z-y), z(x-y), xz)$. Questa è una trasformazione birazionale di $\mathbf{P}^2$ di ordine 5. Esplicite condizioni sugli insiemi Σ e descrizioni dei sistemi W sono contenute nella tesi. Otteniamo dunque il seguente risultato, valido su un campo algebricamente chiuso di caratteristica zero.

TEOREMA 3. – *Sia $\tau \in Bir(\mathbf{P}^2)$ un elemento di ordine primo. Si supponga che τ non sia coniugato ad alcun elemento in $Aut(\mathbf{P}^2)$. Allora τ è coniugato ad una ed una sola delle seguenti trasformazioni birazionali di $\mathbf{P}^2$: un'involuzione di de Jonquières di grado maggiore o uguale a 3, un'involuzione di Geiser, un'involuzione di Bertini, una delle trasformazioni 1-4 sopra descritte.*

In ultimo, vorremmo segnalare che nella tesi è contenuto un successivo teorema che fornisce la descrizione completa degli spazi dei moduli costituiti dalle classi di coniugio delle trasformazioni quotate nel Teorema 3.

BIBLIOGRAFIA

[1] L. BAYLE and A. BEAUVILLE, *Birational involutions of* $\mathbf{P}^2$, Asian J. Math., **4(1)** (2000), 11-18.
[2] S. KANTOR, *Theorie der endlichen Gruppen von eindeutigen Transformationen in der Ebene*, Mayer & Müller, Berlin, (1895).
[3] D.-Q. ZHANG, *Automorphisms of finite order on rational surfaces (with an Appendix by I. Dolgachev)*, to appear in J. Algebra, arXiv: math.AG/0009126

Department of Mathematics, University of Illinois at Chicago
e-mail: defernex@math.uic.edu
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Università di Genova) - Ciclo XII
Direttore di ricerca: Professor Lawrence Ein, University of Illinois at Chicago