Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Luigi De Pascale

Il teorema di Morse-Sard in spazi di Sobolev Problemi di trasporto ottimale e applicazioni

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **4-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2001), n.3 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 439–442.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2001_8_4A_3_439_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2001.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. IV-A, Dicembre 2001, 439-442

Il teorema di Morse-Sard in spazi di Sobolev Problemi di trasporto ottimale e applicazioni.

LUIGI DE PASCALE

1. – Il teorema di Morse-Sard in spazi di Sobolev.

1.1. – Sia $u : R^n \to R^m$ una mappa differenziabile. Denotiamo con $C_u = \{x \in R^n : \nabla u(x) = 0\}$ e $V_u = u(C_u)$ gli insiemi dei punti critici e dei valori critici di u. In molte applicazioni (per esempio in teoria del grado) è necessario conoscere informazioni sulla dimensione e la misura (in vari sensi) di V_u. Il teorema di Morse-Sard riguarda questa questione e dice:

TEOREMA 1 (Sard). – *Siano $\Omega \subset R^n$ aperto, $0 < m < n$ un intero e $u \in C^k(\Omega, R^m)$. Sia A l'insieme dei punti critici di rango r di u in Ω (i.e. $rank(\nabla u(x)) = r$). Allora se $k \geq \frac{m-r}{n-r} u(A)$ ha misura m-dimensionale nulla.*

1.2. – Negli ultimi anni vari autori hanno cercato di stabilire quali siano ipotesi di regolarità precise Valga tale teorema, ed i risultati ottenuti possono essere riassunti (grossolanamente) nel seguente teorema:

TEOREMA 2 (Bates, [1]). – *Siano n, m, r degli interi positivi, $n > m > r$, e sia $s = \frac{n-r}{m-r}$. Se E è un sottinsieme di rango r per $f : R^n \to R^m$ e una delle seguenti condizioni è verificata: $s \in N \cup \{0\}$ e $f \in C^{s-1,1}$, oppure $f \in C^s$, allora $f(E)$ ha misura m-dimensionale nulla.*

1.3. – Nel primo capitolo della tesi si studia applicando metodi della dimostrazione del teorema di Morse-Sard classico insieme a tecniche di teoria geometrica della misura la struttura dell'insieme dei valori critici di funzioni in spazi di Sobolev e si dimostra il seguente teorema:

TEOREMA 3. – *Siano n, m due interi $m < n$, sia $k = n - m + 1$, $n < p$ e sia $u \in W^{k,p}_{loc}(R^n, R^m)$. Allora l'insieme dei valori critici di u ha misura m-dimensionale nulla.*

Si osservi che le funzioni che soddisfano le ipotesi di questo ultimo teorema si immergono (per i teoremi di immersioni di Sobolev su aperti limitati a cui possiamo ridurci grazie alla natura locale del teorema di Sard) in uno spazio di funzioni Hölderiane differente (e più grande) di quello considerato nelle ipotesi del teorema precedente, il teorema di Sard continua a valere in virtù dell'esistenza di un ulteriore derivata debole sufficientemente sommabile.

2. – Il problema di Monge-Kantorovich e un problema di ottimizzazione di forma.

2.1. – Il problema di Monge fu proposto da Monge intorno al 1780 e la descrizione di questo problema è straordinariamente semplice. Nella descrizione originale (e puramente verbale) il problema consisteva in: dato un mucchio di sabbia ed una buca di eguale volume trasportare tutta la sabbia nella buca facendo meno lavoro possibile. In termini matematici e più moderni il problema potrebbe essere formalizzato come segue: Sia (X, d) uno spazio metrico e siano f^+ (il mucchio di sabbia) ed f^- (la buca) due misure di Radon positive e di massa unitaria su X. Sia $T(f^+, f^-) = \{s : X \to X : s \textit{ borelliana e } s_\sharp f^+ = f^-\}$ dove $s_\sharp$ indica il push-forward di una misura tramite s. T rappresenta l'insieme dei modi di trasportare f^+ su f^-, dunque il problema di Monge consiste in:

$$\min_{s \in T(f^+, f^-)} \int d(x, s(x))\, df^+ . \tag{1}$$

2.2. – Per vari motivi (la non linearità e la difficile scelta di una topologia adeguata su T) il problema (1) non è facilmente con metodi diretti. Questo spinse Kantorovich a semplificarlo (rilassarlo) seguendo una idea analoga a quella delle misure di Young. Sia $P(f^+, f^-) = \{\gamma \in \mathcal{M}^+(X \times X) : \pi^1_\sharp \gamma = f^+, \pi^2_\sharp \gamma = f^-\}$ il problema di Monge-Kantorovich consiste in:

$$\min_{\gamma \in P(f^+, f^-)} \int d(x, y)\, d\gamma(x, y) . \tag{2}$$

La relazione tra i due problemi è data dal fatto che se $s \in T(f^+, f^-)$ allora $(id \times s)_\sharp f^+ \in P(f^+, f^-)$ e, per definizione di push-forward di misure,

$$\int_X d(x, s(x))\, df^+(x) = \int_{X \times X} d(x, y)\, d(id \times s)_\sharp f^+(x, y) .$$

In un certo senso $P(f^+, f^-)$ rappresenta l'insieme dei piani (progetti) di trasporto di f^+ su f^-.

2.3. – Data una quantità fissata m di un materiale conduttore e una sorgente di calore f, un problema di ottimizzazione di forma classico che è stato considerato nella tesi consiste nel determinare la disposizione di questo materiale in una regione assegnata Ω in modo da garantire una risposta termica ottimale nel senso che sarà chiaro tra poco. Il problema si formalizza matematicamente come segue: la distribuzione di materiale è modellizzata da una misura positiva μ di massa totale $\|\mu\| = m$. A sua volta f sarà una misura scalare a media nulla o meno a seconda che si impongano condizioni di Dirichlet sulla distribuzione di temperatura o meno. L'energia associata ad una distribuzione di temperatura u è data da

$$E(u, \mu) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 d\mu + \langle f, u \rangle.$$

Dunque ad ogni distribuzione del conduttore μ si associa la quantità $C(\mu) =$

$\inf_{u \in \mathcal{D}(\Omega, R^n)} E(u, \mu)$. Il criterio di ottimalità per le distribuzioni di materiale è il seguente:

$$\max_{\|\mu\| = m,\, spt\,\mu \in \Omega} C(\mu). \tag{3}$$

2.4. – Le relazioni tra questi ultimi due problemi sono stabilite da dei delicati teoremi di dualità [2], [3]. E possono riassumersi in alcune identità che adesso riassumeremo, definiamo per cominciare

$$I(f) = \min\{\langle -f, u\rangle : u \in Lip,\ j(Du) \leq 1\}, \tag{4}$$

allora si ha:

$$(2) = (4) \ \text{ e } \ (3) = \frac{(4)^2}{2m}.$$

Inoltre nel ad ogni piano di trasporto ottimale γ per il problema di Kantorovich si può associare almeno una misura ottimale μ per (3) e viceversa ogni misura ottimale per (3) è associata ad una γ ottimale tramite una costruzione esplicita.

2.5. – Nel capitolo 3 della tesi l'equivalenza dei problemi presentati è estesa ad una varietà Riemanniana e questa estensione viene utilizzata per mettere in luce il diverso comportamento delle soluzioni del problema di ottimizzazione di forma descritto nel precedente paragrafo nel caso in cui la regione in cui si deve distribuire il materiale conduttore sia vincolata ad una sottovarietà di Ω. Nel capitolo 4 l'equivalenza tra il problema di Monge-Kantorovich e il problema della distribuzione ottimale di un conduttore vengono utilizzati per stabilire dei risultati di regolarità per le misure ottimali. Si stabilisce infatti che se μ è una soluzione del problema di ottimizzazione di forma allora la sua dimensione di Hausdorff è controllata dal basso: $dim_H \mu \geq \max\{1, dim_H f^+, dim_H f^-\}$. A ciascuna distanza in R^n si possono associare problemi del tipo (2) e (4). Nel capitolo 5 della tesi si dimostra l'equivalenza delle convergenze variazionali di questi problemi con la convergenza variazionale del funzionale lunghezza e con la convergenza uniforme sui compatti delle distanze al variare delle distanze in un insieme di distanze equivalenti a quella Eclidea definito come segue:

$$D_{a,b} := \{d : a|x-y| \leq d(x, y) \leq b|x-y|\}.$$

Infine nell'ultimo capitolo si studia un approssimazione del problema di ottimizzazione di forma ispirata dalla prima dimostrazione di esistenza di una soluzione del problema di Monge apparsa qualche anno fa in [4]. Più precisamente Per $p > N$ si definisce:

$$G_p(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |Du|^p\,dx - \langle f, u\rangle, \qquad u \in W^{1,p}(\Omega) \cap \{u = 0 \ \text{ on } \ \Sigma\},$$

$$G(u) = \begin{cases} \langle -f, u\rangle & \text{if } u \in Lip_1(\Sigma) \\ +\infty & \text{altrimenti}. \end{cases}$$

Denotiamo con α_p, α i minimi di G_p and G. È un fatto noto che i minimizzanti di G_p sono soluzione di

$$-div(|Du|^{p-2}Du) = f,$$

con condizione di Neumann nulla su $\partial\Omega \backslash \Sigma$, e condizione di Dirichlet su Σ e che $\alpha_p \leqslant 0$, $\alpha \leqslant 0$. Nella tesi si dimostra che

TEOREMA 4. – *Sia u_p il punto di minimo di G_p. Allora esistono $u \in Lip_1(\Sigma)$ e $\mu \in \mathcal{M}(\overline{\Omega})$ tali che: al tendere di $p \to \infty$ (a meno di sottosuccessioni):*

(1) *$u_p \rightharpoonup u$ in $W^{1,q}(\Omega)$ per ogni $q \in [1, +\infty)$.*

(2) *$|Du_p|^{p-2} \rightharpoonup \mu$ in $\mathcal{M}(\overline{\Omega})$.*

(3) *$|Du_p|^{p-2}Du_p \rightharpoonup \mu D_\mu u$ in $\mathcal{M}(\overline{\Omega}, R^N)$.*

(4) *u è un punto di minimo per G e μ moltiplicata per un opportuna costante è soluzione del problema di ottimizzazione di forma.*

Si dimostra inoltre che la convergenza di Du_p verso $D_\mu u$ vale in un senso abbastanza forte.

Un risultato analogo a questo è ottenuto anche nel caso vettoriale ed applicato ad un problema di ottimizzazione di forma in elasticità.

La tesi è disponibile sul sito http://cvgmt.sns.it.

BIBLIOGRAFIA

[1] BATES S. M., *Toward a precise smoothness hypothesis in Sard's theorem*, Proc. of the Amer. Math. Soc., **117** (1993), 279-283.

[2] BOUCHITTÈ G. and BUTTAZZO G., *Characterization of optimal shapes and masses through Monge-Kantorovich Equation*, Journ. of the Europ. Math. Soc., **3** (2001), 139-168.

[3] BOUCHITTÈ G., BUTTAZZO G. and SEPPECHER P., *Shape optimization solutions via Monge-Kantorovich equation*, C.R. Acad. Sci. Paris, **324-I** (1997), 1185-1191.

[4] EVANS L. C. and GANGBO W., *Differential Equations methods for the Monge-Kantorovich Mass Transfer Problem*, Mem. Amer.Math.Soc. Providence, **137** (2000).

[5] GANGBO W. and MCCANN R. J., *The geometry of optimal transportation* , Acta Math., **177** (1996,), 113-161.

Dipartimento di Matematica Applicata «U. Dini», Università di Pisa
e-mail: depascal@dm.unipi.it.

Dottorato in cotutela tra l'Università di Pisa e l'Universitè de Toulon et du Var (Francia) - Ciclo XII
Direttori di ricerca: Prof. Guy Bouchittè (Univ. de Toulon et du Var)
Prof. Giuseppe Buttazzo (Univ. di Pisa)