Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Eloisa Detomi

Generalizzazioni di subnormalità e nilpotenza per gruppi infiniti

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **4-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2001), n.3 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 443–445.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2001_8_4A_3_443_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2001.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. IV-A, Dicembre 2001, 443-445

Generalizzazioni di subnormalità e nilpotenza per gruppi infiniti.

ELOISA DETOMI

Un sottogruppo di un gruppo si dice normale se è il nucleo di un omomorfismo. Poiché la normalità non è una relazione transitiva, in Teoria dei Gruppi è nato il concetto di subnormalità:

DEFINIZIONE 1. – *Un sottogruppo H di un gruppo G si dice subnormale di difetto al più n se esiste una serie finita*

$$H = H_0 \lhd H_1 \lhd \ldots \lhd H_n = G$$

di sottogruppi di G, ognuno dei quali normale nel successivo.

Sebbene la struttura dei gruppi con tutti i sottogruppi normali sia ben conosciuta, indipendentemente che questi siano finiti o infiniti, se sostituiamo la normalità con la subnormalità il quadro diventa molto più complicato e non ancora ben chiaro. Certamente i gruppi nilpotenti sono esempi di gruppi con tutti i sottogruppi subnormali; in particolare, se un gruppo è nilpotente di classe n allora ogni suo sottogruppo è subnormale di difetto al più n (ricordo che un gruppo si dice nilpotente di classe n se ha una serie centrale finita di lunghezza n, ed n è la minima lunghezza di una serie di questo tipo). Per i gruppi finiti (o anche finitamente generati) l'avere tutti i sottogruppi subnormali è anche condizione sufficiente per la nilpotenza: un gruppo finito (finitamente generato) è nilpotente se e solo se ha tutti i sottogruppi subnormali. Più in generale, per un risultato del 1965 di J.E. Roseblade [5], un gruppo in cui tutti i sottogruppi siano subnormali di difetto limitato da un intero n, è nilpotente di classe limitata da una funzione $\varrho(n)$. D'altra parte, nel 1968 H. Heineken e I.J. Mohamed provarono che esistono p-gruppi metabeliani con centro identico e con tutti i sottogruppi propri subnormali e nilpotenti. Quindi, se non c'è limitazione sul difetto, un gruppo infinito con tutti i sottogruppi subnormali può non essere nilpotente. Negli ultimi anni, i gruppi con tutti i sottogruppi subnormali sono stati oggetto di studi approfonditi per capire quando o quanto siano vicini all'essere nilpotenti. Tra i risultati più significativi, è certamente da ricordare quello di W. Möhres nel 1990 che stabilisce che i gruppi con tutti i sottogruppi subnormali sono risolubili. Recentemente, H. Smith e (in modo indipendente) C. Casolo hanno provato che tali gruppi, se privi di elementi di torsione, sono effettivamente nilpotenti. Più in generale, sempre C. Casolo (2001) ha stabilito che i gruppi con tutti i sottogruppi subnormali sono metanilpotenti e sono gruppi di Fitting, cioè ogni loro sottogruppo nilpotente è contenuto in un sottogruppo normale nilpotente.

Nel lavorare sui gruppi con tutti i sottogruppi subnormali, con una tecnica di Brookes ci si può ridurre al caso di gruppi G in cui molti sottogruppi contenenti un fissato sottogruppo F hanno difetto di subnormalità limitato. Studiando questo tipo di gruppi, abbiamo ottenuto la seguente generalizzazione del risultato di Roseblade citato prima:

TEOREMA 1. – *Se G è un gruppo localmente nilpotente ed esiste un sottogruppo finito F tale che ogni sottogruppo che lo contiene sia subnormale di difetto limitato da un intero n, allora esiste un sottogruppo normale finito N tale che G/N è nilpotente di classe limitata in funzione della sola n. Inoltre, G risulta essere nilpotente di classe limitata in funzione di n e dell'ordine di F.*

Ricordo che un gruppo con tutti i sottogruppi subnormali è localmente nilpotente, cioè ogni suo sottogruppo finitamente generato è nilpotente. Come applicazione di questo teorema ai gruppi con tutti i sottogruppi subnormali, si vedano i risultati già citati di C. Casolo. Un risultato analogo vale nel caso periodico: se G è un gruppo periodico con un numero finito di primi che dividono l'ordine degli elementi del gruppo e se esiste un sottogruppo finito F tale che ogni sottogruppo che lo contiene sia subnormale di difetto limitato da un intero n, allora G è estensione di un gruppo finito per un gruppo nilpotente di classe limitata in funzione della sola n. La condizione che sia finito il numero di primi, così come la condizione che F sia finito (e non semplicemente finitamente generato), risultano essere essenziali. Per un quadro generale dei problemi trattati si veda [3].

Nella seconda parte della tesi abbiamo considerato una generalizzazione della subnormalità nei gruppi infiniti.

DEFINIZIONE 2. – *Un sottogruppo H di un gruppo G si dice quasi-subnormale se esiste un sottogruppo K contenente H tale che H abbia indice finito in K e K sia subnormale in G. Per ogni intero n, indicheremo con A_n la classe dei gruppi in cui ogni sottogruppo ha indice finito in un sottogruppo subnormale di difetto al più n.*

Nel 1955 B.H. Neumann [4] dimostrò che gli A_1-gruppi sono finiti-per-abeliani (estensione di un gruppo finito per un gruppo nilpotente di classe 1). Successivamente J.C. Lennox (1977) ha provato che se in un gruppo G ogni sottogruppo ha indice al più c in un sottogruppo subnormale di difetto al più n (cioè se c'è una limitazione anche sull'indice), allora il gruppo G è estensione di un gruppo finito di ordine al più $c!$ per un gruppo nilpotente di classe limitata da una funzione di c ed n. Se si toglie il limite c sull'indice il risultato non è più valido poiché H. Smith ha costruito A_2-gruppi che non sono finito-per-nilpotenti. Comunque, noi abbiamo provato che per gruppi periodici o privi di torsione il risultato di B.H. Neumann si può estendere ad $n > 1$:

TEOREMA 2. – *Se G è un A_n-gruppo periodico o privo di torsione, allora G è estensione di un gruppo finito per un gruppo nilpotente di classe limitata in funzione della sola n.*

Come già osservato, i gruppi costruiti da H. Smith provano che il teorema non si può estendere ulteriormente. Nel caso periodico, il teorema segue da un risultato più generale sui gruppi nei quali esiste un sottogruppo finito F tale che tutti i sottogruppi che lo contengono sono quasi-subnormali di «difetto limitato». Questo, a sua volta, è un'ulteriore applicazione del Teorema 1.

Nell'ultimo capitolo della tesi si affronta un problema concernente il controllo che le immagini omomorfe finite di un gruppo possono avere sulla struttura dell'intero gruppo. Il punto di partenza è un noto teorema di K. Hirsch, secondo il quale un gruppo policiclico in cui tutti i sottogruppi di indice finito sono subnormali è nilpotente: quindi, un gruppo policiclico le cui immagini omomorfe finite sono nilpotenti è nilpotente. Questo risultato è stato esteso ad alcune classi di gruppi più estese. In particolare, B.A.F. Wherfritz e Platonov hanno provato questa proprietà per gruppi lineari su domini d'integrità finitamente generati, mentre D.J.S. Robinson ha considerato gruppi finitamente generati iper-(abeliani o finiti) e gruppi risolubili minimax residualmente finiti. In un recente articolo G. Endimioni [2] ha provato che se in un gruppo G policiclico le immagini omomorfe finite hanno lunghezza di nilpotenza limitata da un intero n (cioè, hanno una serie a fattori nilpotenti di lunghezza al più n) allora il gruppo stesso ha lunghezza di nilpotenza limitata da n. Noi abbiamo esteso questo risultato alla classe dei gruppi lineari su domini d'integrità finitamente generati e alla classe dei gruppi risolubili minimax residualmente finiti (entrambe le classi contengono propriamente la classe dei gruppi policiclici). Inoltre, per queste classi, abbiamo provato che le immagini finite non solo controllano la lunghezza di una serie a fattori nilpotenti dell'intero gruppo, ma anche il «tipo» di serie: questo ci ha permesso di dare una risposta affermativa ad una questione proposta da Endimioni nel suo articolo, che egli aveva lasciato aperta anche nel caso policiclico. Questi risultati sono stati pubblicati in [1].

BIBLIOGRAFIA

[1] DETOMI E., *On the Nilpotent Length of some Residually Finite Groups*, J. Group Theory, **4** (2001), 193-197.
[2] ENDIMIONI G., *On the Nilpotent Length of Polycyclic Groups*, J. Algebra, **203** (1998), 125-133.
[3] LENNOX J. C. and STONEHEWER S. E., *Subnormal Subgroups of Groups*, Oxford Univ. Press (1987).
[4] NEUMANN B. H., *Groups with finite classes of conjugate subgroups*, Math. Z., **63** (1955), 76-96.
[5] ROSEBLADE J. E., *On groups in which every subgroup is subnormal*, J. Algebra, **2** (1965), 402-412.

Dipartimento di Matematica, Facoltà di Ingegneria, Università di Brescia
e-mail: detomi@ing.unibs.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Firenze) - Ciclo XII
Direttore di ricerca: Prof. Carlo Casolo, Università di Firenze