Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Maria Rosaria Formica

Operatori ellittici degeneri a coefficienti in EXP

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **4-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2001), n.3 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 451–454.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2001_8_4A_3_451_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2001.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. IV-A, Dicembre 2001, 451-454

Operatori ellittici degeneri a coefficienti in *EXP*.

Maria Rosaria Formica

Nella presente Tesi si studiano operatori lineari ellittici in forma di divergenza, del tipo

$$L = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right). \tag{1}$$

In [4] S. Spagnolo ha dato una caratterizzazione astratta di tali operatori, nel caso in cui

$$a_{ij} \in L^{\infty}(\Omega), \qquad \Omega \subset \mathbb{R}^n.$$

Egli infatti ha dimostrato che la forma bilineare su $C_0^{\infty}(\Omega) \times C_0^{\infty}(\Omega)$

$$a(u, v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx \tag{2}$$

con $a_{ij} = a_{ji} \in L^1_{loc}(\Omega)$, per $i, j = 1, \dots, n$ e Ω aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, può essere estesa a una forma bilineare e continua su

$$H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega),$$

cioè esiste una costante $M > 0$ tale che

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

per $u, v \in H_0^1(\Omega)$ se e solo se $a_{ij} \in L^{\infty}(\Omega)$.

Nella presente Tesi si provano risultati analoghi per operatori del tipo (1), indebolendo l'ipotesi sui coefficienti, supponendo cioè $a_{ij} \in EXP_{\alpha}(\Omega)$, ossia $\int_{\Omega} e^{\left|\frac{a_{ij}}{\lambda}\right|^{\alpha}} < \infty$ per qualche $\lambda > 0$.

Più precisamente si prova che la forma bilineare (2) può essere estesa a una forma bilineare e continua su $H_0^{1, L^2 \log^{\beta} L}(\Omega) \times H_0^{1, L^2 \log^{\beta} L}(\Omega)$, se e solo se $a_{ij} \in EXP_{1/\beta}(\Omega)$, $(0 < \beta \leq 1)$, dove $H_0^{1, L^2 \log^{\beta} L}(\Omega)$ è lo spazio di Orlicz - Sobolev delle funzioni $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$ tali che $f = |\nabla u|$ appartiene allo spazio di Zygmund $L^2 \log^{\beta} L(\Omega)$, cioè tali che

$$\int_{\Omega} \left| \frac{f}{\lambda} \right|^2 \log^{\beta}\left(e + \frac{|f|}{\lambda} \right) < \infty$$

per qualche $\lambda > 0$.

Per provare tale risultato si mostra che la classica norma di Orlicz negli spazi di Zygmund è equivalente ad alcuni funzionali integrali, più facilmente maneggiabili.

L'interesse verso tali operatori è dovuto a risultati di regolarità per le soluzioni di problemi di Dirichlet per operatori lineari ellittici in forma di divergenza con coef-ficienti in EXP_α dovuti a Franchi-Serapioni-Serra Cassano e Migliaccio-Moscariello.

Sulla scia di un risultato di M. Carozza e C. Sbordone [1], i quali danno una formula per la distanza di L^∞ da EXP, viene data una formula per la distanza di L^∞ dallo spazio di Morrey $L^{p,\lambda}$, in cui L^∞ non è denso.

Nella stessa direzione viene stabilita una formula per la distanza di L^∞ e Lip dallo spazio di Campanato $\mathcal{L}^{p,\lambda}$. Osserviamo che gli spazi $L^{p,\lambda}$ e Lip sono casi particolari degli spazi di Campanato $\mathcal{L}^{p,\lambda}$.

Gli spazi di Zygmund $L^p \log^\beta L$ rivestono un ruolo molto importante per lo studio delle proprietà di integrabilità degli Jacobiani. S. Müller ha provato che lo Jacobiano non negativo $J = J(x, f)$ di mappe $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ della classe di Sobolev $W^{1,n}_{loc}(\Omega)$ appartiene non solo a $L^1_{loc}(\Omega)$ (come risulta evidente per $n = 2$ dalla disuguaglianza di Hölder), ma anche a $L \log L$ localmente in Ω.

Da questo risultato è scaturita una serie di lavori, alcuni dei quali trattano anche il caso di Jacobiano di segno arbitrario. Ad esempio R. Coifman, P. L. Lions, Y. Meyers and S. Semmes hanno provato che anche in tal caso si ottiene di meglio, e cioè J appartiene allo spazio di Hardy $\mathcal{H}^1(\Omega)$.

Nella Tesi in oggetto viene esteso uno dei risultati degli autori appena citati, infatti viene data una caratterizzazione dello spazio di John-Nirenberg BMO, duale di $\mathcal{H}^1(\Omega)$, mediante gli Jacobiani.
Riprendendo lo studio degli operatori del tipo (1), ci si occupa di mappe a distorsione esponenziale nel piano e si estende un risultato di S. Spagnolo (vedi [5]) di continuità nel senso di G-convergenza della mappa

$$f \to A(x, f)$$

dove f varia nella classe delle mappe a distorsione limitata K e $A(x, f)$ è la matrice dei coefficienti degli operatori di Laplace-Beltrami generati da f

$$\mathcal{L} = div[A(x, f)\,\nabla].$$

Più precisamente si dice che $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ha distorsione $K = K(x) \geqslant 1$ se

$$|Df(x)|^2 \leqslant \left[K(x) + \frac{1}{K(x)}\right] J(x, f) \qquad \text{q.o. in } \Omega\,.$$

Per tali mappe $A(x, f)$ è definita da

$$A(x, f)^{-1} = [Df(x)^t Df(x)]\, J(x, f)^{-1}$$

e soddisfa $A^t = A$,

$$\frac{|\xi|^2}{K(x)} \leq \langle A(x)\,\xi,\,\xi\rangle \leq K(x)\,|\xi|^2.$$

Si dimostra il seguente teorema che estende il risultato di S. Spagnolo a successioni di mappe f_h a distorsione non limitata, ma con la sola ipotesi che le funzioni di distorsione K_h delle f_h siano limitate in norma $EXP_\alpha(\Omega)$ $(\alpha > 1)$ (vedi [3]).

TEOREMA 1. – *Sia* $K_h \in EXP_\alpha(\Omega)$, $(\alpha > 1)$, *con norma uniformemente limitata e* $f_h \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^2)$ *una successione di mappe a distorsione* K_h. *Se*
$K_h \rightharpoonup K$ *debolmente in* $\sigma(L^1, L^\infty)$,
$f_h \rightharpoonup f$ *debolmente in* $W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^2)$,
allora

$$A(x, f_h) \xrightarrow{\Gamma} A(x, f).$$

Per la definizione di Γ-convergenza ci si riferisce a quella introdotta da E. De Giorgi.

La Γ-convergenza (o G-convergenza) di operatori di Laplace-Beltrami degeneri era stata considerata da P. Donato e R. De Arcangelis solo per $n > 2$ (vedi [2]).

Infine si intraprende uno studio per operatori di Beltrami opportunamente associati a coppie (u, A) dove $u \in W^{1,2}(\Omega)$ e A è una matrice simmetrica soddisfacente le condizioni

$$A \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{2\times 2})$$

e

$$\frac{|\xi|^2}{K} \leq \langle A(x)\xi,\,\xi\rangle \leq K|\xi|^2.$$

Si affronta tale studio con un approccio diverso dal precedente, ma si dimostra che tali operatori rivelano comunque un comportamento di continuità.

BIBLIOGRAFIA

[1] CAROZZA M., SBORDONE C., *The distance to* L^∞ *in some function spaces and applications,* Differential and Integral Equations, **10 (4)** (1997), 599-607.

[2] DE ARCANGELIS R., DONATO P., *On the convergence of Laplace - Beltrami operators associated to quasiregular mappings,* Studia mathematica, **T.LXXXVI** (1987), 189-204.

[3] FORMICA M. R., *On the Γ-convergence of Laplace-Beltrami operators in the plane,* Annales Academiæ Scientiarium Fennicæ Matematica, **25** (2000), 423-438.

[4] SPAGNOLO S., *Una caratterizzazione degli operatori differenziali autoaggiunti del II ordine a coefficienti misurabili e limitati,* Rend. Sem. Mat. Un. Padova, **39** (1967), 56-64.

[5] SPAGNOLO S., *Some convergence problems,* Sympos. Math., **18** (1976), 391-397.

Dipartimento di Matematica e Applicazioni «R. Caccioppoli», Università di Napoli
e-mail: mformica@unina.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Napoli) - Ciclo XII
Direttore di ricerca: Prof. C. Sbordone, Università di Napoli