Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Roberto Giambò

Metodi variazionali globali su vincoli non olonomi

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **4-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2001), n.3 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 455–458.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2001_8_4A_3_455_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2001.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. IV-A, Dicembre 2001, 455-458

Metodi variazionali globali su vincoli non olonomi.

ROBERTO GIAMBÒ

Obiettivo del lavoro è lo studio di problemi variazionali con vincoli non olonomi: tali vincoli sono caratterizzati dal fatto di essere imposti non solo sulle configurazioni di un sistema ma anche sulle velocità, e sono descritti da una sottovarietà dello spazio delle fasi. Per semplicità è stato considerato solo il caso di vincoli di codimensione 1. In tal modo, date due funzioni $L, \phi : T\mathcal{M} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($\mathcal{M}$ è una varietà differenziabile e $T\mathcal{M}$ è la varietà ad essa tangente), il problema è ricondotto allo studio di curve $z(t) : [0, 1] \to \mathcal{M}$ che sono punti critici del funzionale

$$\mathcal{L}(z) = \int_0^1 L(\dot{z}(t), z(t), t)\, \mathrm{d}t,$$

tra le curve soddisfacenti le condizioni

$$\phi(\dot{z}(t), z(t), t) \equiv 0, \text{ q.o.,}$$

$$z(0) = Q, \qquad z(1) \in \gamma(\mathbb{R}),$$

con $P \in \mathcal{M}$ e γ curva su $\mathcal{M}$ fissati.

1. – Esempi.

Al problema sopra descritto sono riconducibili alcuni casi particolari trattati in lavori recenti.

Il caso più semplice è dato dalle *geodetiche sub-Riemanniane* [1], in cui si ricercano curve su una varietà $\mathcal{M}$ che minimizzano localmente la distanza e tali che la loro velocità sia ortogonale ad un campo assegnato Y. La regolarità di geodetiche sub-Riemanniane tra due punti assegnati è ancora un problema aperto. La situazione cambia se si vincola il punto finale della curva su una curva integrale del campo Y. Infatti in questo caso si può sviluppare una teoria variazionale completamente analoga al caso delle geodetiche classiche, considerando una varietà Riemanniana $(\mathcal{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ed il funzionale

$$\mathcal{L}(z) = \int_0^1 \langle \dot{z}(t), \dot{z}(t) \rangle\, \mathrm{d}t.$$

Inoltre che nel caso delle geodetiche sub-Riemanniane il vincolo è descritto dalla funzione regolare

$$\phi \equiv \langle Y(z), \dot{z}(t) \rangle = 0 .$$

Un primo caso in cui il vincolo non è più descritto da una funzione regolare è dato dal problema della *brachistocrona con attrito* [2], in cui, in aggiunta al caso classico, si prendono in esame anche gli effetti di una forza d'attrito R dipendente dalla velocità v del punto materiale. Riparametrizzando le curve rispetto ad un parametro reale $s \in [0, 1]$ e considerando indipendentemente posizione x e velocità v il funzionale da studiare è

$$\mathcal{L}(z) = \int_0^1 \frac{\sqrt{\langle \dot{x}(s), \dot{x}(t) \rangle}}{v(s)} \, ds ,$$

ed il vincolo (ora non regolare) è dato dal bilancio dinamico

$$\phi \equiv v(s)\ \dot{v}(s) + \langle \nabla U(x(s)), \dot{x}(s) \rangle + R(v(s)) \sqrt{\langle \dot{x}(s), \dot{x}(s) \rangle} = 0 ,$$

ove U è il potenziale delle forze conservative. Si noti che ora $z(s) = (x(s), v(s)) \in \mathcal{M} \times \mathbb{R}$.

Un altro problema di questo tipo fisicamente rilevante è quello dei raggi di luce tra sorgente ed osservatore in uno spazio-tempo relativistico [3]. Il suo studio permette di dare una descrizione matematica del cosiddetto *effetto lenti gravitazionali* [4], che si verifica quando gli astrofisici osservano più immagini dello stesso oggetto stellare. In tal caso si considera una varietà loretziana $(\mathcal{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ed una funzione tempo assoluto T su $\mathcal{M}$, minimizzando il funzionale

$$\mathcal{L}(z) = \int_0^1 \langle \nabla T(z(t)), \dot{z}(t) \rangle \, dt$$

fra le curve tali che

$$\phi \equiv \langle \nabla T(z(t)), \dot{z}(t) \rangle - \sqrt{\langle \dot{z}(t), \dot{z}(t) \rangle + \langle \nabla T(z(t)), \dot{z}(t) \rangle^2} = 0 .$$

Si noti la non regolarità del vincolo anche in questo caso.

2. – Vincoli regolari.

Lo scopo principale del lavoro è sviluppare una teoria variazionale per problemi di questo tipo. Nel caso di un vincolo regolare, si è cercato di formulare ipotesi più generali possibili sulla funzione Lagrangiana e sull'equazione del vincolo, per ottenere che i punti critici per l'integrale della Lagrangiana sul vincolo sono curve regolari che risolvono delle equazioni integro–differenziali di Eulero-Lagrange. In particolare si suppone fra l'altro l'esistenza di un campo vettoriale $Y : \mathcal{M} \to$

$T\mathcal{M}$ tale che

$$\frac{\partial L}{\partial w}(w, z, t) = 0, \qquad \frac{\partial \phi}{\partial w}(w, z, t) = 1, \qquad \forall (w, z, t) \in \phi^{-1}(0),$$

oltre ad un'ipotesi di controllo asintotico sulla Lagrangiana L:

$$L(w, z, t) \geqslant \alpha(z, t)\,|w|^p - \delta(z, t),$$

con α e δ funzioni strettamente positive e $p \geqslant 1$. Fissati quindi γ curva integrale di Y, e $Q \in \mathcal{M} \setminus \gamma(\mathbb{R})$, si studiano i punti critici del funzionale $\mathcal{L}(z)$ tra le curve appartenenti allo spazio di Sobolev $W^{1,p}([0, 1], \mathcal{M})$ verificanti le condizioni specificate all'inizio:

$$\Omega_{Q,\gamma}(\phi) = \{z \in W^{1,p}([0, 1], \mathcal{M})\,|\,z(0) = Q,\ z(1) \in \gamma(\mathbb{R}),\ \phi(\dot z(t), z(t), t) = 0 \ \text{a.e}\}.$$

Nel teorema principale di questa sezione si dimostrano quindi esistenza e regolarità di minimi:

TEOREMA 1. – *Esiste un minimo z per il funzionale $\mathcal{L}$ nello spazio $\Omega_{Q,\gamma}(\phi)$. Inoltre, se $z(t)$ è un punto critico allora $z \in C^2([0, 1], \mathcal{M})$, e soddisfa le seguenti equazioni di Eulero-Lagrange:*

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial w} - \lambda(t)\frac{\partial \phi}{\partial w}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial z} - \lambda(t)\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)\right](\dot z(t), z(t), t) = 0,$$

dove $\lambda(t) \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$ è il moltiplicatore di Lagrange, *e vale:*

$$\lambda(t) = \int_t^1 \left(\frac{\partial L}{\partial z}[Y(z)] + \frac{\partial L}{\partial w}[Y'(z)]\right) e^{\int_s^t \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}[Y(z)] + \frac{\partial \phi}{\partial w}[Y'(z)]\right)\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}s.$$

Inoltre è stata sviluppata una teoria locale costruendo una mappa esponenziale come in genere si fa nella teoria classica delle equazioni differenziali ordinarie.

Poiché il vincolo non è chiuso rispetto alla convergenza debole si fa ricorso alla *condizione di Palais-Smale* per poter passare dalla convergenza debole a quella forte. La dimostrazione che tale condizione è verificata sotto le ipotesi fatte è piuttosto delicata. Grazie a questa condizione, si possono inoltre ottenere risultati di molteplicità usando la teoria classica di Ljusternik–Schnirelman.

3. – Vincoli non regolari.

Nel lavoro viene inoltre studiato il problema per una classe di vincoli non regolari quando la velocità è uguale a 0. Le ipotesi fatte coprono i casi della brachistocrona con attrito e dei raggi di luce. Il sistema considerato è in questo caso *autonomo*, cioè sia L che ϕ sono definite su $T\mathcal{M}$ e non dipendono da $\mathbb{R}$, e sono inoltre funzioni omogenee nelle velocità. Il fatto che ϕ non sia più una funzione regolare non permette di applicare la teoria della sezione precedente, ed è stato perciò sviluppato un metodo di accorciamento per il funzionale basato su esistenza e unicità locale dei minimi. Questo metodo consente di ottenere di nuovo risultati di esistenza e molteplicità di punti critici, caratterizzati dalla condizione che la loro velocità si discosta sempre da 0 quando il vincolo è singolare:

TEOREMA 2. – *Esistono* $\mathrm{cat}(\Omega_{Q,\gamma}(\phi))$ *punti critici per* $\mathcal{L}$ *in* $\Omega_{Q,\gamma}(\phi)$ *di classe* C^2 *(dove* $\mathrm{cat}(\Omega_{Q,\gamma}(\phi))$ *è la categoria di Ljusternik-Schnirelman dello spazio* $\Omega_{Q,\gamma}(\phi)$*). Inoltre, se* $(\Omega_{Q,\gamma}(\phi))$ *non è contraibile, esiste una successione* z_n *di punti critici per* $\mathcal{L}$ *t.c.* $\lim_{n\to\infty}\mathcal{L}(z_n) = +\infty$.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. GIAMBÒ, F. GIANNONI and P. PICCIONE, *Existence, multiplicity and regularity for sub-Riemannian geodesics by variational methods,* Università di Camerino, preprint (2000).
[2] R. GIAMBÒ and F. GIANNONI, *The brachistochrone problem with frictional forces,* ESAIM - Control, Optimisation and Calculus of Variations, **5** (2000).
[3] F. GIANNONI, A. MASIELLO and P. PICCIONE, *A Variational Theory for Light Rays in Stably Causal Lorentzian Manifolds: Regularity and Multiplicity Results,* Comm. Math. Phys., **187** (1997).
[4] P. SCHNEIDER, J. EHLERS and E. FALCO, *Gravitational Lensing,* Springer-Verlag, New York-Berlin, (1992).

Dipartimento di Matematica e Fisica, Università di Camerino
e-mail: giambo@campus.unicam.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Firenze) - Ciclo XI
Direttore di ricerca: Prof. Fabio Giannoni, Università di Camerino