Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Rosa Gini

Cobordismo di immersioni di codimensione uno

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **4-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2001), n.3 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 459–462.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2001_8_4A_3_459_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2001.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. IV-A, Dicembre 2001, 459-462

Cobordismo di immersioni di codimensione uno.

ROSA GINI

1. – Introduzione.

Questa tesi è dedicata alla ricerca di un'interpretazione geometrica del gruppo di cobordismo delle immersioni di codimensione uno nelle varietà. In particolare vengono ottenuti dei risultati espliciti nel caso delle dimensioni 3 e 4.

Sia M una varietà connessa di dimensione n. Si consideri l'insieme delle immersioni $f: F \to M$, con F una varietà compatta di dimensione $(n-1)$. Si consideri sull'insieme la relazione di equivalenza seguente: (F, f) è *cobordante* a (F', f') se esiste un cobordismo astratto X tra F e F', ovvero una varietà compatta di dimensione n con bordo $F \sqcup F'$, e un'immersione $\Phi : X \to M \times I$, trasversa al bordo, tale che $\Phi_{|F} = f \times \{0\}$ e $\Phi_{|F'} = f' \times \{1\}$.

Fissata M, l'insieme $N(M)$ delle classi di cobordismo di immersioni di codimensione uno in M è un semigruppo con la legge di composizione data dall'unione disgiunta. L'elemento neutro è l'immersione del bordo di un piccolo disco, o, equivalentemente a meno di cobordismo, l'immersione vuota. Se $M = \mathbf{R}^n$ è facile vedere che $N(M)$ è un gruppo, poiché la composizione di un'immersione f con la riflessione in un iperpiano fornisce l'inversa di f a meno di cobordismo. In realtà $N(M)$ è sempre un gruppo. Questo risultato è stato ottenuto da nel 1974 da Vogel, applicando la costruzione di Pontrjagin-Thom. Questo procedimento, standard in teoria del cobordismo classica, permette di stabilire un isomorfismo tra un (semi)gruppo di cobordismo e un gruppo di classi di omotopia di mappe, a valori in uno spazio classificante che è generalmente lo spazio di Thom di un fibrato classificante. In questo caso il teorema di Vogel stabilisce l'isomorfismo

$$N(M) = [M^*, \Omega^\infty \Sigma^\infty \mathbf{P}^\infty].$$

Questa descrizione permette inoltre di comprendere che $N(M)$ è un invariante del tipo di omotopia della compattificazione M^* di M. Nel caso particolare delle sfere questa presentazione era stata trovata nel 1966 da Wells, che aveva dimostrato che i gruppi delle sfere sono dei 2-gruppi. Questo ha permesso a Liulevicius di fornire dei calcoli espliciti dei gruppi delle sfere fino alla dimensione 9.

Tuttavia l'interpretazione di $N(M)$ in termini di topologia algebrica non getta una chiara luce sul significato geometrico elementare del gruppo. La ricerca di invarianti ha portato a una ricerca approfondita sull'invariante più classico di $N(\mathbf{R}^n)$, ovvero il numero θ_n di punti n-upli modulo 2, che si è però rivelato insufficiente in quasi tutte le dimensioni. Per esempio in dimensione 3 il gruppo è generato dalla celebre immersione di Boy del piano proiettivo, che ha un solo punto triplo, ma non è $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ bensì $\mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$, e ammette come invariante completo l'invariante di Arf, vedi l'articolo di Pinkall [5]. Fino alla metà degli anni Novanta non esisteva comunque in letteratura un calcolo esplicito di $N(M)$ nel caso in cui M^* non fosse una sfera.

L'unico calcolo esplicito in questo senso è stato ottenuto nel 1995 da Benedetti e Silhol in [1], nel caso in cui M è una 3-varietà orientabile. Il gruppo risulta essere $H_2(M, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \times H_1(M, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \times \mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$ con una legge di composizione intrecciata. La struttura del gruppo è rivelata essenzialmente dall'uso degli invarianti di James-Hopf, ovvero invarianti associati agli insiemi di autointersezioni multiple dell'immesione, e dall'introduzione di un invariante che estende l'invariante di Arf classico a tutte le 3-varietà orientabili.

In questo lavoro noi anzitutto estendiamo le tecniche di Benedetti e Silhol al caso delle 3-varietà non orientabili. Nella seconda parte del lavoro, scritto parzialmente in collaborazione con Louis Funar, introduciamo una nuova tecnica, che porta al calcolo del gruppo nel caso delle 4-varietà orientabili.

Tale tecnica ha recentemente portato a dei risultati pressoché completi fino alla dimensione 7, vedi [2].

Come motivazione finale a questo lavoro segnaliamo che Funar ha dimostrato che il gruppo $N(M)$ è in corrispondenza biunivoca con l'insieme delle cubulazioni di M modulo una naturale relazione di equivalenza, vedi [3] e [2]. Questo apre la strada alla possibilità di definire per via combinatorica degli invarianti di varietà che utilizzino cubulazioni in luogo di triangolazioni.

Le dimostrazioni dei risultati principali di questa tesi hanno una linea-guida intuitiva. Per salvaguardare il contenuto intuitivo dell'esposizione, alcune definizioni e argomentazioni sono solo abbozzate, e vanno temporaneamente accettate con un po' di fede o di fantasia, rispettivamente. Le definizioni e le dimostrazioni rigorose sono contenute in successive sezioni tecniche. Ogni capitolo, quindi, ha un'ultima parte dedicata a dettagli, a qualche osservazione collaterale o ad approfondimenti.

La tesi raccoglie inoltre delle parti compilative, pensate per introdurre in modo più dettagliato il lettore interessato alla bibliografia del settore: al teorema di Vogel, agli invarianti θ_n e di James-Hopf, all'applicazione delle teorie di coomologia generalizzate, all'uso delle cubulazioni.

Il contenuto del primo capitolo di questa tesi è apparso in [4].

2. – Descrizione dei risultati.

Nel primo capitolo di questa tesi otteniamo, nel teorema 1.3.2, che se M è una 3-varietà non orientabile allora $N(M)$ è un gruppo con supporto $H_2(M, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \times H_1(M, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ e una legge di composizione simile al caso orientabile. Il fatto cruciale che fa sì che il gruppo di una varietà non orientabile sia «più piccolo» del gruppo di una varietà orientabile è la proposizione 1.3.11, e deriva dal fatto che in un ambiente non orientabile esistono isotopie che invertono l'orientazione locale. Le tecniche usate sono essenzialmente estensioni delle tecniche sviluppate da Benedetti e Silhol nel caso orientabile. Tuttavia la trattazione del caso non orientabile richiede alcuni risultati intermedi specifici. In particolare otteniamo nel teorema 1.2.10 la classificazione a meno di omotopia regolare delle immersioni di strisce, ovvero degli anelli e dei nastri di Moebius, in una 3-varietà non orientabile. Inoltre nella proposizione 1.2.1 analizziamo una proprietà fondamentale dell'azione di Hass e Hughes di $H^1(F, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ sull'insieme delle classi di omotopia regolare di immersioni di una superficie F in una 3-varietà.

L'approccio al calcolo del gruppo delle 4-varietà è meno diretto e più sofisticato. Tutto il secondo capitolo della tesi è dedicato all'introduzione di una tecnica valida in ogni dimensione. La prima parte del capitolo è dedicato alla revisione dei principali risultati in letteratura necessari per il seguito. Questi danno ragione del perché gli invarianti di James-Hopf delle autointersezioni sono insufficienti al calcolo del gruppo in dimensione maggiore di 3. Nella seconda parte del capitolo introduciamo quindi un nuovo insieme di invarianti. La loro definizione affonda le radici nell'approccio proveniente dalla topologia algebrica, che viene però reinterpretato in termini più elementari. Introduciamo infatti su $N(M)$ una filtrazione naturale in un contesto di topologia algebrica, e dimostriamo nel lemma 2.3.1 che essa equivale a considerare, per ogni k compreso tra 1 e n, i sottogruppi F^k delle immersioni che, a meno di cobordismo, non intersecano il $(k-1)$-scheletro di M. Tale filtrazione è classicamente invariante al variare della decomposizione cellulare. Allora il *k-invariante coomologico* associa a un'immersione f che non interseca il $(k-1)$-scheletro il cociclo

$$\begin{array}{cccc} \chi_f^k\colon & C_k(M) & \to & N(\mathbf{R}^k) \\ & e & \mapsto & f \cap e. \end{array}$$

Non siamo in grado di dimostrare che l'elemento di $H^k(M, N(\mathbf{R}^k))$ rappresentato da questo cociclo è invariante a meno di cobordismo. Sia $NEH^k(M) \subseteq H^k(M, N(\mathbf{R}^k))$ il sottogruppo, eventualmente banale, dei cocicli che rappresentano l'immesrsione banale. L'invariante è allora

$$\chi^k\colon F^k \to H^k(M, N(\mathbf{R}^k))/NEH^k(M).$$

In realtà proviamo in seguito che, se M è una qualsiasi 4-varietà, $NEH^k(M)$ è effettivamente il sottogruppo banale per tutti i $k \leqslant 4$.

L'accuratezza di χ^k risiede nel fatto che il suo nucleo è F^{k+1}. Questo significa che l'omomorfismo indotto nel sottogruppo graduato $F^1/F^2 \times \ldots \times F^{n-1}/F^n \times F^n$ è iniettivo: ricordiamo che il gruppo graduato è insiemisticamente isomorfo al gruppo originale. Una proprietà cruciale, che permette di effettuare i calcoli nella dimensione bassa, è che il duale di Poincaré di χ^k è la riduzione modulo 2 della restrizione dell'invariante di James-Hopf, per tutti i k tali che θ_k è la riduzione modulo 2 di $N(\mathbf{R}^k)$.

Vale la pena di notare che questo approccio è coerente con l'analisi della successione spettrale di Atiyah-Hirzebruch relativa alla teoria di coomologia generalizzata associata ai gruppi di cobordismo di immersioni. Questa analisi è brevemente esposta alla fine del secondo capitolo.

Nel terzo capitolo siamo quindi in grado di ridurre il problema del calcolo di $N(M)$ nel caso in cui M sia una 4-varietà orientabile a un problema di estensione. Infatti proviamo nel teorema 3.3.4 che esiste una successione esatta corta

$$0 \to H_1(M, \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}) \xrightarrow{k} N(M) \xrightarrow{JH} JH(M) \to 0$$

in cui $JH(M)$ è l'immagine dell'invariante di James-Hopf. Questo gruppo, descritto nella sezione 3.1, è un sottogruppo di $H_3(M, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \times H_2(M, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \times H_1(M, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \times H_0(M, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ con la struttura intrecciata. Il conucleo di $JH(M)$ è isomorfo a $H_2(M, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})/Q(M)$, in cui con $Q(M)$ indichiamo la quadrica associata alla forma di intersezione. Il calcolo di questo gruppo è stato effettuato sviluppando una tecnica piuttosto delicata.

Questo risultato si ottiene principalmente per mezzo degli invarianti coomologici. La definizione della mappa k, tuttavia, è dovuta a una costruzione puramente geometrica ed elementare, che sfrutta un'estensione al caso 4-dimensionale di costruzioni di Benedetti e Silhol, contenuta nella sezione 3.4.2.

Anche ove non esplicitamente specificato, i teoremi sono validi anche per varietà non compatte: tuttavia in questo caso la coomologia deve essere intesa come coomologia a supporto compatto.

BIBLIOGRAFIA

[1] BENEDETTI R. and SILHOL R., *Spin and Pin$^-$ structures, immersed and embedded surfaces and a result of Segre on real cubic surfaces,* Topology, **34** (1995), 651-678.

[2] FUNAR L. and GINI R. *The graded cobordism group of codimension-one immersions,* GT/0104037 (2001).

[3] FUNAR L. *Cubulations, immersions, mappability and a problem of Habegger,* Ann. Sci. École Norm. Sup., **32** (1999), 681-700.

[4] GINI R. *Cobordism of immersions of surfaces in non-orientable 3-manifolds,* man. math., **104** (2001), 49-69.

[5] PINKALL U. *Regular homotopy classes of immersed surfaces,* Topology, **24** (1985), 421-434.

Dipartimento di Matematica, Università di Pisa
e-mail: gini@dm.unipi.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Pisa) - Ciclo XI
Direttore di ricerca: Prof. Riccardo Benedetti, Università di Pisa