Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Laura Levaggi

Controllo a struttura variabile per equazioni di evoluzione in spazi di Banach

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **4-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2001), n.3 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 475–478.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2001_8_4A_3_475_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2001.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. IV-A, Dicembre 2001, 475-478

Controllo a struttura variabile per equazioni di evoluzione in spazi di Banach.

LAURA LEVAGGI

1. – Inquadramento del problema e obiettivi della ricerca.

La metodologia di base del controllo a struttura variabile si applica al problema della regolazione di un sistema fisico governato da un'equazione differenziale ordinaria. Essa consiste a grandi linee nella scelta di una superficie regolare S nello spazio degli stati e nella costruzione di una funzione di controllo di tipo feedback in grado di garantire che abbia luogo uno *sliding mode*, ossia che l'evoluzione del sistema, una volta raggiunta la superficie, sia vincolata ad essa. Ovviamente S deve essere costruita in modo che l'obiettivo del controllo sia raggiunto dal moto di sliding (si pensi per esempio al problema dell'inseguimento di una traiettoria). La caratteristica fondamentale di queste tecniche consiste nella scelta di una legge di controllo discontinua nella variabile di stato del problema differenziale.

Dal punto di vista matematico sorge un notevole problema: non solo la discontinuità così creata rende impossibile applicare teoremi classici di esistenza ed unicità della soluzione al sistema completo, ma lo stesso concetto di soluzione dell'equazione differenziale controllata viene di solito a cadere. In generale, infatti, il luogo dei punti di singolarità della legge di controllo contiene la stessa superficie che vogliamo rendere attrattiva, cosicché lo sliding mode non può essere soluzione dell'equazione di partenza in nessun senso classico.

Nel caso delle equazioni differenziali ordinarie il metodo usato più comunemente per estendere il concetto di soluzione è quello di Filippov. All'equazione differenziale si sostituisce una particolare inclusione differenziale che permette di generalizzare il concetto di soluzione al caso discontinuo. Un altro sistema per ottenere l'equazione del moto sulla superficie S deriva dall'applicazione del cosiddetto *metodo del controllo equivalente*. Dal vincolo di restrizione alla superficie tipico dello sliding mode, sotto certe condizioni di regolarità, si ottiene una legge di controllo lineare e continua, che sostituita nell'equazione di partenza dà luogo ad una nuova equazione differenziale su S. La soluzione corrispondente rappresenta l'evoluzione del sistema sulla superficie nel seguente senso: si dimostra che, scelta comunque una legge di controllo continua che sia in grado di mantenere il sistema in un intorno della superficie S, il limite del moto così ottenuto al tendere a zero dell'ampiezza dell'intorno è l'unica soluzione dell'equazione differenziale derivante dall'applicazione del controllo equivalente. Se inoltre il sistema è affine nel controllo, questo metodo fornisce esattamente l'unica soluzione di Filippov dell'equazione discontinua che può essere vincolata ad S.

L'obiettivo del lavoro di ricerca di questa tesi è la generalizzazione di tale approccio al controllo di sistemi in cui l'evoluzione è governata da un'equazione differenziale in uno spazio di Banach di dimensione infinita, per esempio un'equazione alle derivate parziali, integrale o integrodifferenziale. Infatti in questi casi la variabile di stato non può essere rappresentata attraverso un numero finito di parametri: si pensi per esempio a problemi come il controllo della temperatura in una fornace, lo smorzamento delle vibrazioni di una struttura flessibile o più semplicemente lo studio di un'equazione differenziale ritardata. Si è scelto di prendere in esame equazioni del tipo

$$\dot{x}(t) + Ax(t) = Bu, \qquad A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X, \qquad B : U \to X \tag{1}$$

con $-A$ operatore lineare illimitato generatore di un semigruppo fortemente continuo sullo spazio di Banach riflessivo X, B lineare e continuo da U in X, U di Banach. Il primo scopo è introdurre un nuovo concetto di soluzione generalizzata, in modo da dare senso al problema della soluzione di (1) anche in presenza di una legge $u = u(x)$ discontinua nella variabile di stato $x \in X$. Successivamente bisogna studiare il problema dell'esistenza di soluzioni generalizzate di (1) che siano viabili su un predeterminato dominio S, ossia tali che dato un valore iniziale $x(0) = x_0 \in S$ verifichino il vincolo $x(t) \in S$ per ogni $t \geq 0$. Il secondo obiettivo è quello di rivedere il concetto di controllo equivalente nell'ambito infinito-dimensionale per estendere il metodo discusso in precedenza, nonché stabilire una relazione tra l'evoluzione così determinata e le soluzioni generalizzate viabili.

2. – Risultati principali.

Come per le soluzioni di Filippov si è scelto in questa tesi di introdurre un nuovo concetto di soluzione generalizzata facente capo ad una inclusione differenziale. Sebbene la definizione sia generale, la riportiamo qui nella forma in cui viene usata per risolvere il problema di controllo. Data l'equazione (1) supponiamo che la legge di controllo u abbia la seguente forma

$$u : X \backslash S \to U, \qquad S = \ker C, \qquad C : X \to Y \tag{2}$$

con Y spazio di Banach e C operatore lineare e continuo.

DEFINIZIONE 1. – *Dato un problema di Cauchy per* (1) *con dato iniziale* x_0, *con* u *soddisfacente* (2), *chiamiamo* soluzione generalizzata *di tale problema una funzione del tipo*

$$x(t) = K(t)\, x_0 + \int_0^t K(t-s)\, f(s)\, ds,$$

$$f(s) \in F(x(s)) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{\text{co}}\, Bu(\overline{\mathcal{B}}(x(s), \varepsilon) \backslash S), \ \text{q.o. } s$$

dove $K(\cdot)$ *è il semigruppo generato da* $-A$.

Si può dimostrare che una condizione di crescita lineare sulla legge u è sufficiente affinché questa sia una buona definizione. Non solo, ma la multiapplicazione F soddisfa le ipotesi di regolarità necessarie per applicare i risultati in [1] e ottenere sia una condizione necessaria affinché esistano soluzioni generalizzate viabili su S, sia una condizione sufficiente di viabilità nel caso in cui il semigruppo sia compatto.

Per quanto riguarda il metodo del controllo equivalente vengono individuati due possibili scenari per cui una generalizzazione è proposta.

Vediamo in dettaglio in cosa consistono. Grazie alla scelta di S (2) possiamo esprimere il vincolo di viabilità per l'evoluzione a partire da un punto $x_0 \in S$ attraverso la formula $Cx(t) = 0$. Procedendo in maniera formale, possiamo derivare e sostituire $\dot{x}(t)$ (1), ottenendo $C[-Ax + Bu] = 0$. Questa è la relazione da cui prenderemo spunto per definire il controllo equivalente e stabilire l'ambito in cui generalizzare il metodo. Il primo tentativo è ovviamente il più naturale: supponendo che S sia contenuto in $\mathcal{D}(A)$ e CB sia invertibile con continuità almeno su $CA(S)$ ha senso definire

$$u_{\mathrm{eq}}(x) = (CB)^{-1} CAx, \qquad \forall x \in S.$$

Sostituendo in (1) si ottiene la seguente equazione differenziale sul sottospazio S

$$\dot{x}(t) = \widetilde{A}x(t), \quad \widetilde{A}: S \to S, \quad \widetilde{A}x = [B(CB)^{-1}C - I]Ax,$$

che ha perfettamente senso dato che si prova facilmente che $\widetilde{A}$ genera un gruppo $\widetilde{K}(\cdot)$ sullo spazio di Banach S. Veniamo ora al citato risultato di regolarizzazione:

TEOREMA 1. – *Sia u_δ una qualunque legge di controllo regolare tale che il problema di Cauchy $\dot{x} + Ax = Bu_\delta$, $x(0) = x_{0,\delta}$ ammetta soluzione forte x_δ. Supponiamo che siano verificate le condizioni di esistenza del controllo equivalente e dato $x_0 \in S$ chiamiamo $x^*(t) = \widetilde{K}(t)x_0$ l'evoluzione corrispondente. Scegliamo i punti iniziali $x_{0,\delta} \in S \oplus B(U)$ e tali che $x_{0,\delta} \to x_0$ per $\delta \to 0$. Detta Q la proiezione di $S \oplus B(U)$ su $B(U)$ supponiamo che*

$$\|Qx_\delta(t)\| \to 0 \ \text{unif. sui compatti di } [0, +\infty], \quad \|PAQx_\delta\|_{L^1_{loc}(0,+\infty;X)} \to 0;$$

allora x_δ converge a x^* uniformemente su $[0, T]$ per ogni $T > 0$.

Si può inoltre dimostrare il seguente legame tra esistenza del controllo equivalente ed esistenza di soluzioni generalizzate.

TEOREMA 2. – *Supponiamo che le ipotesi per l'esistenza del controllo equivalente siano soddisfatte. La condizione $Bu_{eq}(x) \in F(x)$ per ogni $x \in S$ è necessaria affinché esistano soluzioni generalizzate di (1) viabili su S. Tale condizione è anche sufficiente se $-A$ genera un semigruppo compatto. In questo caso inoltre esiste un'unica soluzione generalizzata viabile, coincidente con l'evoluzione generata attraverso il metodo del controllo equivalente.*

La condizione di scelta di S nel dominio dell'operatore A è piuttosto forte e rappresenta una seria limitazione per quanto riguarda le applicazioni. Per tentare di risolvere questo problema si è cercato di sostituire questa ipotesi con la più generica condizione di densità dell'intersezione $S \cap \mathcal{D}(A)$ in S, che appare in quest'ambito irrinunciabile. Il nuovo quadro viene completato da altre due ipotesi di non singolarità che permettono di definire un nuovo concetto di controllo equivalente che mantenga certe caratteristiche di regolarità. Si assume l'invertibilità di CB e che l'operatore CA ammetta estensione $\overline{CA}$ lineare e continua su X tale che per ogni $x \in S$ vale $-\overline{CA} = \lim_{h \to 0^+} CK(h)x$. Si definisce così il controllo equivalente esteso (che per abuso di notazioni continuiamo ad indicare con u_{eq})

$$u_{eq}(x) = (CB)^{-1}\overline{CA}x, \quad x \in S.$$

Come prima, sostituendo tale legge di controllo nell'equazione (1) si perviene ad un'equazione differenziale su S della forma $\dot{x}(t) = \widetilde{A}x(t)$, con $\widetilde{A} = B(CB)^{-1}\overline{CA} - A$ da $S \cap \mathcal{D}(A)$ in S. Il metodo è convalidato dal seguente risultato:

PROPOSIZIONE 1. – *Sotto le condizioni di esistenza del controllo equivalente esteso l'operatore $\widetilde{A}$ genera il semigruppo C_0 $\widetilde{K}(\cdot)$ sullo spazio di Banach S.*

Anche in questo caso si prova un risultato di regolarizzazione.

TEOREMA 3. – *Supponiamo che le ipotesi di esistenza del controllo equivalente esteso siano verificate. Sia u_δ una qualunque legge di controllo regolare tale che il problema di Cauchy $\dot{x} + Ax = Bu_\delta$, $x(0) = x_{0,\delta}$ ammetta soluzione forte x_δ. Detto Q l'operatore di proiezione su $B(U)$ lungo S, supponiamo che $x_{0,\delta}$ converga ad $x_0 \in S$ per $\delta \to 0$ e che*

$$\|Q\dot{x}_\delta\|_{L^1_{loc}(0,+\infty)} \to 0, \qquad \delta \to 0.$$

Allora se $x^*(t) = \widetilde{K}(t)\,x_0$ è la soluzione data col metodo del controllo equivalente di punto iniziale x_0, si ha $\|x_\delta(t) - x^*(t)\|$ converge a zero uniformemente sui compatti di $[0, +\infty)$.

Si prova inoltre che il Teorema 2 è valido anche in questo nuovo quadro esteso.

Nell'ultima parte della tesi viene introdotta una classe di sistemi per cui sono esplicitate le condizioni sulla scelta della superficie S che permettono di verificare le ipotesi di esistenza del controllo equivalente esteso. Vengono inoltre presentati alcuni esempi di applicazione della teoria sviluppata al caso di stabilizzazione di equazioni paraboliche (con relative simulazioni numeriche) e di soppressione del disturbo.

Nota: risultati successivi alla discussione della tesi hanno permesso di provare che l'ipotesi di compattezza nel Teorema 2 è superflua. Lo stesso vale per l'analogo risultato corrispondente al controllo equivalente esteso.

BIBLIOGRAFIA

[1] O. CÂRJĂ e I. I. VRABIE, *Some new viability results for semilinear differential inclusions*, No. Dea Nonlinear Differential Equations Appl., 4 (1997), 401-424.

[2] A. FILIPPOV, *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*, Kluwer Academic Publishers (1988).

[3] YU. V. ORLOV, *Discontinuous unit feedback control of uncertain infinite-dimensional systems*, IEEE Trans. Aut. Control, **45** n. 5 (2000), 834-843.

[4] V. I. UTKIN, *Sliding Modes in Control Optimization*, Springer-Verlag (1992).

Dipartimento di Matematica, Università di Genova,
e-mail: levaggi@dima.unige.it

Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Università di Genova) - Ciclo XII
Direttore di ricerca: Prof. Tullio Zolezzi, Università di Genova