BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

GIUSEPPE LOMBARDO

Geometria delle varietà Kuga-Satake

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **4-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2001), n.3 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 483–486.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2001_8_4A_3_483_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2001.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. IV-A, Dicembre 2001, 483-486

Geometria delle varietà Kuga-Satake.

GIUSEPPE LOMBARDO

1. – Introduzione.

Le varietà di Kuga-Satake sono varietà abeliane costruite a partire da strutture di Hodge razionali polarizzate (V, h, ψ) di peso due di tipo $K3$, cioè con $dim V^{2,0} = 1$ (dove la coppia V spazio vettoriale sui razionali ed $h : \mathbf{C}^* \to GL(V \mathbf{R})$ rappresentazione algebrica tale che $h(t) = t^2 \cdot Id$ definiscono una struttura di Hodge razionale di peso 2, e ψ è una polarizzazione su tale struttura). La costruzione originale di M. Kuga e I. Satake infatti (v. [1]) associa varietà abeliane a superfici $K3$ utilizzando il secondo gruppo di coomologia della superficie con polarizzazione indotta dal cup-product: questa costruzione può essere generalizzata, e permette di costruire varietà abeliane a partire da strutture di Hodge razionali polarizzate di tipo $K3$. Considerata infatti la sottoalgebra pari $C^+(V)$ dell'algebra di Clifford $C(V)$, le proprietà della struttura di Hodge (V, h, ψ) permettono di costruire un toro complesso

$$\left(\frac{C^+(V) \otimes \mathbf{R}}{C^+(V)_{\mathbf{Z}}}, J \right)$$

su cui è possibile definire una polarizzazione ponendo

$$E(x, y) = Tr(a\iota(x)\, y),$$

dove ι è l'involuzione canonica dell'algebra di Clifford ed a un opportuno elemento di $C^+(V)$.

2. – Risultati di Paranjape.

Considerata una superficie liscia X con $h^{2,0}(X) = 1$, la congettura di Kuga-Satake-Hodge, caso particolare della congettura di Hodge, predice che esista una superficie Z ed un diagramma

$$\begin{array}{ll} & Z \xrightarrow{\phi} A \times A \\ \pi & \downarrow \\ & X \end{array}$$

tale che $\pi_* \phi^*(V) \cong V$ dove V è il complemento ortogonale del gruppo di Neron-Severi in $H^2(X, \mathbf{Q})$ ed A la Kuga-Satake associata a V (si ha, se A è la Kuga-Satake associata a V, l'inclusione $V \hookrightarrow H^1(A, \mathbf{Q}) \otimes H^1(A, \mathbf{Q}) \subset H^2(A \times A, \mathbf{Q})$, v. [3]). La corrispondenza tra superfici $K3$ e varietà di Kuga-Satake è stata analizzata in dettaglio da Paranjape (v. [2]) nel caso in cui la superficie sia la desingolarizzazione del rivestimento doppio di $\mathbf{P}^2$ ramificato su sei rette in posizione generale, trovando che in questo caso Z è prodotto di due curve. Paranjape ha infatti dimostrato che, per tale superficie $K3$, la varietà di Kuga-Satake si decompone in un numero di copie di un fourfold abeliano semplice di tipo Weil ottenuto come varietà di Prym di un rivestimento 4:1 di una curva ellittica con una particolare curva di genere 5; utilizzando la tecnica della superficie di Schoen ha quindi provato che la superfice $K3$ si può riottenere a partire dal rivestimento ed infine che tale costruzione realizza la corrispondenza di Hodge.

3. – Relazioni tra varietà di Kuga-Satake e varietà abeliane di tipo Weil.

Il primo problema preso in esame, in analogia all'esempio di Paranjape, è stato l'analisi delle relazioni intercorrenti in generale tra le varietà di Kuga-Satake e le varietà abeliane di tipo Weil, cioè varietà abeliane X di dimensione complessa $2n$ con un campo immaginario quadratico $K \subseteq End_0(X)$ tale che, per ogni k in K l'azione di k su $T_0 X$ sia diagonalizzabile con n entrate $\sigma(k)$ ed n entrate $\overline{\sigma(k)}$, dove σ è un embedding di K in $\mathbf{C}$. Lo studio delle varietà abeliane di tipo Weil ha particolare importanza nell'ambito dello studio della congettura di Hodge in quanto queste varietà contengono classi di Hodge eccezionali nella coomologia intermedia della varietà, inoltre nel caso dei fourfolds queste sono le uniche varietà abeliane per cui la congettura di Hodge è aperta (Teorema di Moonen e Zarhin). Quello che si ottiene è una stretta relazione tra fourfolds abeliani di tipo Weil con discriminante banale e varietà di Kuga-Satake. Considerando infatti un fourfold abeliano generico X di tipo Weil su di un campo immaginario quadratico $K = \mathbf{Q}(\sqrt{-d})$, l'analisi delle sottostrutture di Hodge contenute nel secondo gruppo di coomologia della varietà e delle rappresentazioni del gruppo di Mumford-Tate conduce al seguente risultato

TEOREMA 1. – *Se il discriminante di X non è banale, $\Lambda_K^2 H^1(X, \mathbf{Q})$ è una sottostruttura di Hodge semplice di $H^2(X, \mathbf{Q})$ con algebra di endomorfismi un'algebra di quaternioni, mentre se il disciminate è banale, tale sottostruttura si decompone in due sottostrutture di tipo $K3$ tra loro isomorfe di dimensione 6 con polarizzazione $Hyp^2 \oplus [-2] \oplus [-2d]$.*

Nel caso in cui X abbia discriminante banale, indicando con T la sottostruttura di Hodge di dimensione 6, risulta dunque possibile utilizzare la costruzione di Kuga e Satake a partire da T, ed in questo modo associare una varietà di Kuga-Satake ad un fourfold abeliano di tipo Weil con discriminante banale. L'analisi dell'azione del campo immaginario quadratico e delle strutture complesse mostra che si ha una sorta di «ciclicità» nella costruzione che associa ad un fourfold di tipo Weil con discriminante banale una struttura di Hodge di tipo $K3$ ed a questa una varietà abeliana in quanto X stesso può essere riottenuto a partire dalla varietà di Kuga-Satake. Si ha infatti il seguente

TEOREMA 2. – *La varietà di Kuga-Satake associata ad un fourfold abeliano generico di tipo Weil con discriminante banale è isogena al prodotto di quattro copie del fourfold stesso.*

Anche nel caso di dimensioni superiori si continua ad avere un legame tra varietà di Kuga-Satake e vartietà abeliane di tipo Weil. Analizzando la decomposizione di Poincarè si prova il

TEOREMA 3. – *La varietà di Kuga-Satake costruita a partire da una struttura di Hodge polarizzata generica di tipo K3 di dimensione* $2m \equiv 2 \pmod 4$ *è isogena al prodotto di un numero di copie (dipendente dalla m) di una varietà abeliana* 2^{m-1}*-dimensionale di tipo Weil con discriminante banale.*

4. – Cicli di Hodge.

Il secondo poblema preso in esame è stato lo studio dei cicli di Hodge per varietà abeliane semplici che compaiono nella decomposizione di varietà di Kuga-Satake. I casi considerati sono quelli in cui la struttura di Hodge polarizzata di tipo $K3$ ha dimensione 6 (ed in questo caso il risultato della precedente sezione permette di concludere che lo spazio dei cicli di Hodge ha dimensine 3 in quanto la varietà abeliana semplice che si ottiene è un fourfold di tipo Weil con discriminante banale), 7 ed 8. In questi due ultimi casi, utilizzando rappresentazioni dell'algebra di Lie sl_2 si ottengono i seguenti

TEOREMA 4. – *Sia* (V, h, ψ) *una struttura di Hodge generale di tipo K3 di dimensione 8 con polarizzazione* $\psi \cong Hyp^2 \oplus [a] \oplus [b] \oplus [c] \oplus [d]$ $(a, b, c, d \in \mathbf{Q}_{>0})$*. Se* $abcd = 1$*, la varietà di Kuga-Satake associata è isogena ad* $(A_+ \times A_-)^4$ *con* $A_\pm$ *varietà abeliane semplici non isogene di dimensione 8, e* $\mathcal{B}^4(A_\pm)$ *contiene una* sl_2*-rappresentazione di dimensione* 9.

TEOREMA 5. – *Sia* (V, h, ψ) *una struttura di Hodge generale di tipo K3 di dimensione* 7 *con polarizzazione* $\psi \cong Hyp^2 \oplus [a] \oplus [b] \oplus [c]$ $(a, b, c \in \mathbf{Q}_{>0})$*. La varietà di Kuga-Satake associata è isogena ad* A^4 *con A varietà abeliana semplice di dimensione* 8, *e* $\mathcal{B}^4(A_\pm)$ *contiene una* sl_2*-rappresentazione di dimensione* 9, *una di dimensione* 5 *e due uno-dimensionali.*

La tecnica utilizzata, cioè il considerare sl_2 rappresentazioni, fornisce risultati anche per una classe di varietà abeliane non collegate a varietà Kuga-Satake ma che presentano analoghe caratteristiche per quanto riguarda l'esistenza di sl_2 rappresentazioni. Le varietà abeliane analizzate sono quelle di tipo III cioè, secondo la classificazione di Albert, quelle aventi per algebra degli endomorfismi un'algebra di quaternioni totalmente definita. In questo caso si ottiene il

TEOREMA 6. – *Lo spazio dei cicli di Hodge di codimensione m di una varietà abeliana* $2m$*-dimensionale di tipo III contiene una* sl_2 *rappresentazione di dimensione* $2m + 1$.

L'utilità nell'ambito dello studio della congettura di Hodge di tali risultati risiede nel fatto che se un ciclo è algebrico, allora lo sono tutti quelli contenuti nella medesima rappresentazione. Risultati come i teoremi precedenti semplificano quindi molto le verifiche da effettuare per dedurre l'eventuale algebricità dei cicli di Hodge.

5. – Realizzazione geometrica.

L'ultimo problema preso in esame è stato lo studio di una realizzazione geometrica della mappa che decompone la struttura di Hodge $\Lambda^2_K H^1(X, \mathbf{Q})$ in due sottostrutture di tipo $K3$ tra loro isomorfe. Il caso analizzato, simile a quello di Paranjape, è quello di un rivestimento 3:1 di una curva ellittica con una curva di genere 5 totalmente ramificato in quattro punti. In questo caso la Prym del rivestimento è un fourfold abeliano di tipo Weil sul campo imaginario quadratico $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$ con discriminante banale, quindi sono verificate le condizioni del Teorema 1. Considerato φ automorfismo di C di ordine 3 tale che $\dfrac{C}{\langle\varphi\rangle} = E$, la superficie di Schoen associata al rivestimento è, per definizione $S = \dfrac{C \times C}{\langle f, J\rangle}$ dove f è il flip dei due fattori e $J = (\varphi, \varphi^2)$. L'analisi della superficie di Schoen risulta interessante in quanto si prova facilmente che $\Lambda^2_K H^1(X, \mathbf{Q})$ è contenuta nel secondo gruppo di coomologia della superficie. Lo studio delle singolarità e della mappa canonica permette di ottenere i seguenti

TEOREMA 7. – *La desingolarizzazione $\widetilde{S}$ di S ha come curve eccezionali due A_2-curve, quattro curve (-3) razionali e quattro (-1)-curve.*

TEOREMA 8. – *La mappa canonica $\widetilde{S}_{(-1)} \to \mathbf{P}^1$ (dove $\widetilde{S}_{(-1)}$ è ottenuta da $\widetilde{S}$ contraendo le (-1)-curve) contrae ogni curva eccezionale di tipo A_2 ad un punto, mentre le (-3)-curve vengono mandate suriettivamente su $\mathbf{P}^1$.*

La ricerca dell'involuzione di S che permette di spezzare la sottostruttura di Hodge non può però essere condotta in modo analogo all'analisi di Paranjape in quanto, studiando la mappa $S \to E \times E \xrightarrow{+} E$ utilizzata da Paranjape nel caso del rivestimento 4:1 si ottiene il seguente

TEOREMA 9. – *La mappa $S \to E$ è una fibrazione con curve di genere due, ciascuna delle quali ammette un involuzione avente per quoziente una curva ellittica, ma tale involuzione non si estende ad una involuzione su S.*

BIBLIOGRAFIA

[1] M. KUGA e I. SATAKE, *Abelian Varieties Attached to Polarized K3-Surfaces*, Math. Ann., **169** (1967), 239-242.

[2] K. PARANJAPE, *Abelian varieties associated to certain K3-Surfaces*, Compositio Math., **68** (1988), 11-22.

[3] B. VAN GEEMEN, *Kuga-Satake varieties and the Hodge conjecture*, in: The arithmetic and geometry of algebraic cycles (Banff, AB, 1998), NATO Sci. Ser. C Math. Phys. Sci., 548, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (2000), 51-82.

Dipartimento di Matematica, Università di Torino
e-mail: lombardo@dm.unito.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Università di Genova) - Ciclo XI
Direttore di ricerca: Prof. B. van Geemen, Università di Pavia