Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Luca Lorenzi

Risultati di regolarità, stabilità, instabilità e biforcazione per un problema a frontiera libera

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **4-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2001), n.3 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 487–490.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2001_8_4A_3_487_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2001.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. IV-A, Dicembre 2001, 487-490

Risultati di regolarità, stabilità, instabilità e biforcazione per un problema a frontiera libera.

LUCA LORENZI

1. – Introduzione.

In questa tesi viene studiato un modello, proposto da G. Sivashinsky, riguardante un problema di combustione. Il modello matematico, rappresentato da un sistema di equazioni differenziali a frontiera libera dipendenti da un parametro reale λ per le incognite Θ e S e il fronte ξ, è dato da

$$D_t \Theta(t, \eta, y) = \Delta\Theta(t, \eta, y), \quad t \geq 0, \quad y \in \mathfrak{I}, \quad \eta < \xi(t, y), \tag{1}$$

$$\Theta(t, \eta, y) = 1, \quad t \geq 0, \quad y \in \mathfrak{I}, \quad \eta \geq \xi(t, y), \tag{2}$$

$$D_t S(t, \eta, y) = \Delta S(t, \eta, y) - \lambda\Delta\Theta(t, \eta, y), \quad t \geq 0, \quad y \in \mathfrak{I}, \quad \eta \neq \xi(t, y). \tag{3}$$

Θ e S sono supposte continue in $\eta = \xi(t, y)$, mentre le loro derivate normali soddisfano in $\eta = \xi(t, y)$ le condizioni di salto

$$[D_n \Theta](t, \xi(t, y), y) = -e^{S(t, \xi(t, y), y)}, \quad t \geq 0, \quad y \in \mathfrak{I}, \quad \eta = \xi(t, y), \tag{4}$$

$$[D_n S](t, \xi(t, y), y) = \lambda[D_n \Theta](t, \xi(t, y), y), \quad t \geq 0, \quad y \in \mathfrak{I}, \quad \eta = \xi(t, y). \tag{5}$$

Qui $\mathfrak{I}$ denota sia il generico intervallo $[-l, l]$ sia l'intera retta reale.

Nel caso della striscia (i.e. $\mathfrak{I} = [-l, l]$) si suppone che le pareti $y = \pm l$ siano muri adiabatici. In termini matematici questa proprietà si traduce nelle seguenti condizioni:

$$D_y \Theta(t, \eta, \pm l) = D_y S(t, \eta, \pm l) = 0. \tag{6}$$

Supporremo inoltre che il fronte soddisfi la condizione

$$D_y \xi(t, \pm l) = 0. \tag{7}$$

Il problema (1)-(5) (più (6)-(7) nel caso della striscia) ammette soluzione di tipo onda viaggiante piana con velocità -1, definita come al solito, a meno di traslazioni, da $(\xi, \Theta, S) = (-t, \Theta^0(\eta + t), S^0(\eta + t))$ con

$$\Theta^0(x) = e^x, \quad S^0(x) = \lambda x e^x, \ \text{se } x < 0, \quad \Theta^0(x) = 1, \quad S^0(x) = 0, \ \text{se } x \geq 0. \tag{8}$$

Una delle domande che sorgono spontanee è stabilire se questa onda viaggiante è stabile o è instabile rispetto a perturbazioni bi-dimensionali. Per quanto riguarda il problema posto nell'intero spazio in [1] è stata data una parziale risposta matematica alle congetture proposte in [2] e [3].

In questa tesi, oltre a provare risultati di regolarità e analiticità delle soluzioni del problema (1)-(5) (più (6)-(7) nel caso della striscia) per dati iniziali sufficientemente vicini (in norma) alla soluzione onda viaggiante (8), si determinano, nel caso della striscia, intervalli di variabilità del parametro λ in corrispondenza ai quali si hanno risultati di stabilità e valori in corrispondenza ai quali si hanno risultati di instabilità.

Infine nell'ultima parte della tesi si determinano, sempre nel caso della striscia, onde viaggianti non planari (cioè dipendenti esplicitamente dalla variabile y) utilizzando il classico metodo della biforcazione.

2. – I risultati di regolarità.

Fissando prima un sistema di riferimento solidale con l'onda (8) e operando, quindi, un opportuno cambiamento di incognite, si trasforma il problema (1)-(5) in uno equivalente completamente non lineare e non locale nella nuova incognita $\mathbf{u} = (v, w, h)$ della forma

$$
\left\{\begin{array}{ll}
\mathbf{u}_t(t, x, y) = \mathcal{L}\mathbf{u}(t, x, y) + \mathcal{F}(\mathbf{u}(t, \cdot))(x, y), & (t, x, y) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_- \times \mathfrak{I}, \\
\mathcal{B}\mathbf{u}(t, \cdot)(y) = \mathcal{G}(\mathbf{u}(t, \cdot))(y), & t \geq 0, \ \ y \in \mathfrak{I},
\end{array}\right. \tag{9}
$$

dove $\mathcal{L}$ è un operatore differenziale del second'ordine a coefficienti costanti, dipendente dal parametro λ e $\mathcal{B} = (B_0, B_1, B_2)$ è un operatore differenziale di bordo di ordine 1 a coefficienti costanti, dipendente anch'esso da λ. $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ sono operatori *non lineari* e *non locali* che dipendono non solo da $\mathbf{u}$ ma anche dalle sue derivate (fino all'ordine 2 nel caso di $\mathcal{F}$ e fino all'ordine 1 nel caso di $\mathcal{G}$), e sono quadratici in $\mathbf{u} = 0$.

La condizione (6)-(7) diventa per la nuova incognita $\mathbf{u}$

$$
D_y \mathbf{u}(t, x, \pm l) = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in (-\infty, 0], \tag{10}
$$

Con questa trasformazione l'onda viaggiante (8) si traforma nella soluzione nulla. di (9). Quindi il problema dell'esistenza-unicità e regolarità della soluzione del problema (1)-(5) (più (6)-(7) nel caso della striscia) per dati iniziali vicini all'onda viaggiante è equivalente al problema dell'esistenza-unicità e regolarità della soluzione di (9) (più (10) nel caso della striscia) per dati iniziali piccoli (in norma). Il vantaggio di lavorare con il problema (9) sta nel fatto che può essere trattato con la teoria dei semigruppi (analitici).

Introduciamo ora gli spazi utilizzati nella tesi. Denotiamo con Ω sia il semispazio $\mathbf{R}_- \times \mathbf{R}$ sia la semistriscia $(-\infty, 0) \times (-l, l)$.

DEFINIZIONE 1. – *Per ogni $k > 0$, $X_k(\Omega)$ denota lo spazio di tutte le funzioni $\mathbf{f} := (f, g, h) \in C^k(\overline{\Omega})$ che tendono a zero all'infinito. $X_k^{\#}(\Omega)$ è lo spazio di tutte le funzioni $\mathbf{f}$ tali che la funzione $(e^{-x/2}f, e^{-x/2}g, e^{x/2}h)$ appartiene a $C^k(\overline{\Omega})$.*

DEFINIZIONE 2. – *Per ogni $T > 0$ e ogni $\alpha \in (0, 1)$, $\mathcal{X}_{\alpha/2, \alpha}(0, T, \Omega)$ denota lo spazio di tutte le funzioni $\mathbf{f} : [0, T] \times \Omega \to \mathbf{R}$ che sono $\alpha/2$-hölderiane in t uniformemente rispetto alla coppia (x, y) e α-hölderiane in (x, y) uniformemente rispetto a t.*

Denotiamo poi con $\mathcal{X}_{1+\alpha/2, 2+\alpha}(0, T, \Omega)$ lo spazio di tutte le funzioni $\mathbf{f} : [0, T] \times \Omega \to \mathbf{R}$ tali che $D_t\mathbf{f}$, $D_{xx}\mathbf{f}$, $D_{xy}\mathbf{f}$ e $D_{yy}\mathbf{f}$ appartengono a $\mathcal{X}_{\alpha/2, \alpha}(0, T, \Omega)$.

Gli spazi con peso $\mathcal{X}^{\#}_{\alpha/2,\,\alpha}(0,\,T,\,\Omega)$ *e* $\mathcal{X}^{\#}_{1+\alpha/2,\,2+\alpha}(0,\,T,\,\Omega)$ *sono definiti in maniera del tutto analoga.*

Riportiamo per semplicità i risultati principali nel caso senza peso. Analoghi risultati valgono nel caso con peso.

TEOREMA 1. – *Per ogni* $T>0$ *e* $\alpha\in(0,\,1)$ *esiste* $\varrho_0>0$ *tale che per ogni* $\mathbf{u}_0\in B(0,\,\varrho_0)\subset X_{2+\alpha}(\Omega)$, *che soddisfi opportune condizioni di compatibilità, il problema* (9) (*più* (10) *nel caso della striscia*) *ammette un'unica soluzione* $\mathbf{u}\in\mathcal{X}_{1+\alpha/2,\,2+\alpha}(0,\,T,\,\Omega)$ *tale che* $\mathbf{u}(0,\,\cdot)=\mathbf{u}_0$, *la quale dipende con continuità dal dato iniziale. In particolare* $t\to\mathbf{u}(t,\,\cdot)$ *è analitica in* $(0,\,T)$ *con valori in* $X_{2+\alpha}(\Omega)$.

Se $\mathbf{u}_0\in X_{3+\alpha}(\Omega)$ *e, nel caso della striscia, soddisfa un'opportuna condizione, allora* $D_x\mathbf{u}$ *e* $D_y\mathbf{u}$ *sono differenziabili con continuità una volta nel tempo e due volte nello spazio in* $(-\infty,\,0)\times\mathfrak{I}$ *con derivate* $\alpha/2$*-hölderiane nel tempo e* α*-hölderiane nello spazio in ogni insieme della forma* $(-\infty,\,\varepsilon)\times\mathfrak{I}$ *con* $\varepsilon<0$.

Se poi $\mathbf{u}_0\in X_{4+\alpha}(\Omega)$ *e soddisfa due ulteriori condizioni di compatibilità, allora* $D_t\mathbf{u}\in\mathcal{X}_{1+\alpha/2,\,2+\alpha}(0,\,T,\,\Omega)$ *e la sua norma in* $\mathcal{X}_{1+\alpha/2,\,2+\alpha}(0,\,T,\,\Omega)$ *dipende con continuità da* $\mathbf{u}_0$.

3. – I risultati di stabilità-instabilità nella striscia.

Poichè, come abbiamo già notato, la trasformazione che ci ha permesso di ricondurci al problema (9)-(10) trasforma l'onda viaggiante (8) nella soluzione nulla del problema (9)-(10), studiare la stabilità dell'onda viaggiante per il problema (1)-(7) equivale a studiare la stabilità della soluzione nulla per il problema (9)-(10).

Per studiare la stabilità della soluzione nulla di (9)-(10) è necessario conoscere lo spettro della realizzazione L di $\mathcal{L}$ in $X_0(\Omega)$ e $X_0^{\#}(\Omega)$. Si dimostra che nel caso senza peso lo spettro continuo di L è costituito da tutti gli $\omega\in\mathbf{C}$ tali che $\Re\omega\leqslant-(\Im\omega)^2$, mentre lo spettro puntuale è costituito dalle soluzioni della cosiddetta relazione di dispersione. In particolare lo spettro continuo contiene 0 come punto di accumulazione di elementi dello spettro. Pertanto in corrispondenza ai valori di λ per i quali lo spettro puntuale contiene elementi con parte reale positiva si dimostra, usando il teorema di stabilità linearizzata, che la soluzione nulla di (9)-(10) è instabile rispetto a perturbazioni bi-dimensionali sia nel caso dello spazio senza peso che in quello con peso.

L'introduzione del peso esponenziale permette di allontanare lo spettro continuo dall'asse immaginario facendolo collassare nella semiretta $(-\infty,\,-1/4]$. La stabilità della soluzione nulla di (9)-(10) dipende ora solo dalla posizione dello spettro puntuale rispetto all'asse immaginario.

I principali risultati riguardanti la stabilità sono contenuti nel seguente teorema. Ricordiamo che qui Ω denota la semistriscia $(-\infty,\,0)\times(-l,\,l)$.

TEOREMA 2. – *Esiste un insieme* A_l, *caratterizzato esplicitamente, tale che se* $\lambda\in A_l$ *la soluzione nulla del problema* (9)-(10) *è instabile sia in* $X_{2+\alpha}(\Omega)$ *che in* $X^{\#}_{2+\alpha}(\Omega)$. *Viceversa se* $\lambda\notin\overline{A_l}$ *la soluzione nulla di* (9)-(10) *è stabile in* $X^{\#}_{2+\alpha}(\Omega)$.

4. – Biforcazione di onde viaggianti non piane nel caso della striscia.

Nella parte finale della tesi si sono provati risultati di biforcazione di onde viaggianti a partire dall'onda viaggiante piana (8). I principali risultati ottenuti sono contenuti nel seguente teorema. Anche qui Ω denota la semistriscia $(-\infty, 0)\times(-l, l)$.

TEOREMA 3. – *Per ogni* $n\in\mathbf{N}\setminus\{0\}$ *esistono* $\delta_n\in\mathbf{R}_+$, *quattro funzioni infinitamente differenziabili* $\mathbf{U}_n:(-\delta_n, \delta_n)\to C^{2+\alpha}((-\infty, 0]\times[-l, l])\times C^{2+\alpha}((-\infty, 0]\times[-l, l])\times C^{2+\alpha}([0, +\infty)\times[-l, l])$, *definita da*

$$\mathbf{U}_n(\sigma)(x, y) = e^{-x/2}(v_n(\sigma)(x, y), w_n(\sigma)(x, y), h_n(\sigma)(-x, y)), \qquad \forall\sigma\in(-\delta_n, \delta_n),$$

λ_n, $c_n:(-\delta_n, \delta_n)\to\mathbf{R}$, $\xi_n^1:(-\delta_n, \delta_n)\to\{f\in C^{2+\alpha}([-l, l]): f'(\pm l)=0\}$, con $\mathbf{U}_n(\sigma)$ dipendente esplicitamente da y, tali che per ogni $\sigma\in(-\delta_n, \delta_n)$ la coppia $(\Theta_n(\sigma), S_n(\sigma))$ definita da

$$\Theta_n(\sigma)(t, \eta, y) = v_n(\sigma)(t, \eta + c_n(\sigma)\, t - \xi_n(\sigma)(t, y), y), \quad \eta\leqslant\xi_n(\sigma)(t, y),$$

$$S_n(\sigma)(t, \eta, y) = \begin{cases} w_n(\sigma)(t, \eta + c_n(\sigma) - \xi_n(\sigma)(t, y), y), & \eta\leqslant\xi_n(\sigma)(t, y), \\ h_n(\sigma)(t, \eta + c_n(\sigma) - \xi_n(\sigma)(t, y), y), & \eta>\xi_n(\sigma)(t, y), \end{cases}$$

è soluzione del problema (1)-(7) *corripondente a* $\lambda=\lambda_n(\sigma)$, *dove* $\xi_n(\sigma)(t, y) := -c_n(\sigma)\, t + \xi_n^1(\sigma)(y)$. *Inoltre* $\lambda_n(0) = 1 + \dfrac{\pi^2 n^2}{l^2}$, $c_n(0)=1$, $\xi_n^1(0)=0$, *e* $\mathbf{U}_n(\sigma)$ *coincide con l'onda viaggiante piana definita in (8) se e solo se* $\sigma=0$, *Infine, per ogni* $n\in\mathbf{N}\setminus\{0\}$, *esiste un intervallo centrato in* 0 *tale che, per ogni* σ *appartenente a tale intervallo, la velocità del fronte* $c_n(\sigma)$ *è più grande di* 1. *Inoltre esiste* $n_0=n_0(l)\in\mathbf{N}$ *tale che* $\lambda_n\gg(0)>0$ *per ogni* $n\geqslant n_0$.

BIBLIOGRAFIA

[1] BRAUNER C.-M., LUNARDI A., *Instabilities in a two-dimensional combustion model with free boundary*, Arch. Rational Mech. Anal., **154** (2000), 157-182.

[2] BUCKMASTER J. D., LUDFORD G. S. S., THEORY OF LAMINAR FLAMES, Cambridge University Press, Cambridge (1992).

[3] SIVASHINSKY G. I., *Non-linear analysis of hydrodynamic instability in laminar flame I: Derivation of the basic equations*, Acta Mathematica, 4 (1977), 1177-1206.

Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Parma
e-mail: luca.lorenzi@unipr.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Pisa) - Ciclo XII
Direttore di ricerca: Prof. Alessandra Lunardi, Università di Parma