Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Antonio Lotta

Connessioni di Cartan su varietà CR

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **4-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2001), n.3 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 491–494.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2001_8_4A_3_491_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2001.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. IV-A, Dicembre 2001, 491-494

Connessioni di Cartan su varietà *CR*.

Antonio Lotta

Il lavoro di tesi è incentrato sul problema dell'equivalenza per strutture CR. Proseguendo l'indagine svolta da N. Tanaka negli anni '70 sulle strutture CR *fortemente regolari* ([5], [6]), perveniamo ad una soluzione completa del problema nell'ipotesi in cui la corrispondente algebra di Levi-Tanaka sia semisemplice. La soluzione è ottenuta provando che una varietà CR fortemente regolare nel senso di Tanaka ammette una *connessione di Cartan* canonica. Tale connessione è, tra quelle ammissibili rispetto alla struttura CR, l'unica la cui curvatura verifica un'opportuna condizione di *normalità*.

1. – Terminologia e notazioni.

Sia (M, HM, J) una varietà (almost) CR di tipo (k, s). Per ogni punto $x \in M$ denotiamo con $\mathfrak{m}(x) = \bigoplus_{p<0} \mathfrak{g}_p(x)$ l'algebra di Lie graduata fondamentale pseudocomplessa di N. Tanaka (cfr. [3], [6]). Essa è ottenuta a partire dalla successione $\{0\} \subset \mathcal{D}_{-1} \subset \ldots \subset \mathcal{D}_{-p} \subset \ldots$ di sottomoduli di ΓTM, tale che $\mathcal{D}_{-1} = \Gamma HM$ e $\mathcal{D}_{-p} = \mathcal{D}_{-p+1} + [\mathcal{D}_{-p}, \mathcal{D}_{-1}]$, ponendo $\mathfrak{g}_p(x) = (\mathcal{D}_p)_x / (\mathcal{D}_{p+1})_x$ per ogni $p<0$.

M si dice *fortemente regolare di tipo* $\mathfrak{m}$ se per ogni $x \in M$ risulta $\dim_{\mathbf{R}} M = \dim_{\mathbf{R}} \mathfrak{m}(x)$ ed inoltre le algebre $\mathfrak{m}(x)$ sono tutte isomorfe ad un fissato modello $\mathfrak{m} = \bigoplus_{-\mu \leq p \leq -1} \mathfrak{g}_p$, $\mu \geq 2$. Il prototipo di varietà CR di tipo $\mathfrak{m}$ è il gruppo connesso e semplicemente connesso $M(\mathfrak{m})$ la cui algebra di Lie è $\mathfrak{m}$, che è dotato di una naturale struttura CR invariante a sinistra.

Una struttura CR di tipo $\mathfrak{m}$ è una G-struttura; si tratta precisamente di una riduzione del fibrato dei riferimenti lineari $L(M)$ al gruppo strutturale $G_0(\mathfrak{m}, J)^{\#} \subset GL(\mathfrak{m})$, dove $G_0(\mathfrak{m}, J)^{\#}$ è il prodotto dei sottogruppi $G_0(\mathfrak{m}, J)$ ed N di $GL(\mathfrak{m})$ definiti come segue. Il primo è il gruppo degli automorfismi di $\mathfrak{m}$ rispetto alla struttura graduata pseudocomplessa, mente il secondo è il sottogruppo nilpotente costituito dagli isomorfismi $\varphi \in GL(\mathfrak{m})$ tali che $\varphi(X_j) \equiv X_j \bmod \mathfrak{m}_{(j+1)}$ $\forall j<0$, dove $\mathfrak{m}_{(j)}$ denota la filtrazione naturale di $\mathfrak{m}$ indotta dalla struttura graduata.

L'algebra fondamentale pseudocomplessa $\mathfrak{m}$ ammette un prolungamento canonico $\mathfrak{g} = \bigoplus_{p \geq -\mu} \mathfrak{g}_p(x)$ che è l'algebra di Lie $\mathbf{Z}$-graduata transitiva e pseudocomplessa, massimale tra i tutti prolungamenti di $\mathfrak{m}$ aventi queste due proprietà. Essa si chiama l'algebra di *Levi-Tanaka* associata ad $\mathfrak{m}$. Risulta $\dim_{\mathbf{R}} \mathfrak{g} < +\infty$ se e solo se $\mathfrak{m}$ è non degenere, nel senso che $[X, \mathfrak{g}_{-1}] \neq 0$ per ogni vettore non nullo $X \in \mathfrak{g}_{-1}$. Ciò è equivalente a richiedere che la forma di Levi di M sia non degenere per ogni punto $x \in M$.

Per un'informazione dettagliata su queste nozioni il lettore può consultare [3].

2. – Geometrie di Cartan.

Prima di enunciare i risultati principali della tesi, è opportuno fare qualche osservazione di carattere generale sul concetto di geometria di Cartan. Essa è una generalizzazione della geometria secondo il programma di Erlangen di Klein. Com'è noto, nell'ambito della geometria differenziale, le strutture geometriche che rientrano nello schema di Klein sono le varietà omogenee G/H, essendo G un gruppo di Lie ed H un sottogruppo chiuso.

La generalizzazione proposta da Cartan nella prima metà del secolo scorso consiste euristicamente nel considerare strutture geometriche su varietà che sono *deformazioni* di modelli omogenei assegnati a priori. In questo approccio emerge un nuovo concetto di *curvatura*, più generale di quello classico di Gauss e Riemann, in base al quale lo spazio di Klein G/H su cui una geometria di Cartan è modellata, è *piatto* per definizione. La curvatura misura quanto la struttura geometrica in considerazione devia dal suo modello.

La fondazione rigorosa di questo concetto è basata sulle nozioni di fibrato principale e di connessione di Cartan (cfr. [4]). Un approccio alternativo, il cui utilizzo nell'ambito della geometria CR ci risulta inedito, è basato sulla nozione di *gauge di Cartan*. Se M è una varietà differenziabile ed S è uno spazio di Klein avente la stessa dimensione, una 1-forma a valori in $\mathfrak{g} = Lie(G)$, definita su un aperto $U \subset M$ è detta un *gauge* modellato su S se $\overline{\theta}(x) = p\theta(x) : T_x U \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \cong \mathbf{R}^n$ è un isomorfismo lineare per ogni $x \in U$. Qui $p : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ è la proiezione naturale. Una *geometria di Cartan* su M modellata su S si può quindi definire come una famiglia $\mathcal{A} = \{U_\alpha, \theta_\alpha\}$ di gauges, tale che gli aperti U_α ricoprano M, e che sia massimale rispetto alla proprietà che due qualunque gauges θ_α, θ_β siano compatibili; ciò significa che esiste una funzione $k : U_\alpha \cap U_\beta \to H$ tale che

$$\theta_\beta = Ad(k^{-1})\, \theta_\alpha + k^* \omega_H \tag{1}$$

essendo ω_H la forma di Maurer-Cartan del gruppo di Lie H. Rinviamo il lettore a [4] per maggiori informazioni.

La *curvatura* di un gauge di Cartan è $\Omega_\theta := d\theta + \frac{1}{2}[\theta, \theta]$, che è una 2-forma a valori in $\mathfrak{g}$. Il caso piatto corrisponde all'annullarsi di Ω_θ per tutti i gauges della geometria, il che accade se e solo se M è localmente isomorfa al modello S.

3. – Strutture CR fortemente regolari come geometrie di Cartan.

Il risultato principale della tesi fornisce un'interpretazione canonica delle strutture CR fortemente regolari di tipo $\mathfrak{m}$ come geometrie di Cartan, il cui modello infinitesimo è $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_+)$, essendo $\mathfrak{g}$ l'algebra di Levi-Tanaka relativa ad $\mathfrak{m}$ e $\mathfrak{g}_+$ la sottoalgebra tale che $\mathfrak{g}_+ = \bigoplus_{p \geq 0} \mathfrak{g}_p$.

Si osservi che $\mathfrak{g}$ è un $\mathfrak{m}$-modulo rispetto alla rappresentazione aggiunta. Ha senso quindi considerare i gruppi di coomologia $H^k(\mathfrak{m}, \mathfrak{g})$ associati al complesso $(C^k(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}), \partial)$ dove $C^k(\mathfrak{m}, \mathfrak{g})$ è identificabile con lo spazio vettoriale delle forme k-multilineari su $\mathfrak{m}$ a valori in $\mathfrak{g}$. Il seguente risultato è noto (cfr. [5]):

PROPOSIZIONE 1. – *Se* $\mathfrak{g}$ *è semisemplice, gli operatori* $\partial : C^k(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}) \to C^{k-1}(\mathfrak{m}, \mathfrak{g})$ *ammettono operatori aggiunti* $\partial^* : C^{k-1}(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}) \to C^k(\mathfrak{m}, \mathfrak{g})$ *rispetto ad un opportuno prodotto scalare, di modo che ogni classe di coomologia in* $H^k(\mathfrak{m}, \mathfrak{g})$ *contiene un unico rappresentante* α *armonico, cioè tale che* $\partial\alpha = \partial^* \alpha = 0$.

Sussite inoltre uno splitting naturale $C^n(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}) = \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} C_k^n(\mathfrak{m}, \mathfrak{g})$, dove $\varphi \in C_k^n(\mathfrak{m}, \mathfrak{g})$ se e solo se φ è omogenea di grado k, cioè: $\varphi(X_1, \ldots, X_n) \in \mathfrak{g}_{i_1 + \ldots + i_n + k}$, $\forall X_s \in \mathfrak{g}_{i_s}$

DEFINIZIONE 1. – *Siano* $S = G/H$ *uno spazio omogeneo tale che* $Lie(G) = \mathfrak{g}$ *e* $Lie(H) = \mathfrak{g}_+$ *ed* M *una varietà di dimensione* $\dim_{\mathbf{R}} \mathfrak{m}$. *La* funzione di curvatura *di un gauge* $\theta : TU \to \mathfrak{g}$ *modellato su* S, *è la funzione* $K_\theta : U \to C^2(\mathfrak{m}, \mathfrak{g})$ *tale che*

$$K_\theta(X, Y) = \Omega_\theta(\overline{\theta}^{-1} X, \overline{\theta}^{-1} Y), \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{m} .$$

La definizione seguente è mutuata da [1]:

DEFINIZIONE 2. – *Sia* M *una varietà di dimensione* $\dim_{\mathbf{R}} \mathfrak{m}$. *Una geometria di Cartan* $\mathcal{C}$ *su* M *modellata su* S, *si dice:*

regolare, *se per ogni gauge si ha* $K_\theta^{(k)} = 0$ *per* $k \leqslant 0$; *qui* $K_\theta^{(k)}$ *denota la componente omogenea di* K_θ *di grado* k;

normale, *se è regolare, e per ogni gauge risulta* $\partial^* K_\theta = 0$.

Se M è dotata di una struttura CR di tipo $\mathfrak{m}$, diremo che $\mathcal{C}$ è *ammissibile* rispetto a questa struttura, se per ogni gauge θ,

$$U \ni x \mapsto \overline{\theta}(x)^{-1} \in L(M)$$

è una sezione della corrispondente $G_o(\mathfrak{m}, J)^{\#}$-struttura.

Il nostro risultato principale è quindi il seguente:

TEOREMA 1. – *Si assuma che* $\mathfrak{m}$ *sia non degenere e che la corrispondente agebra di Levi-Tanaka* $\mathfrak{g}$ *sia semisemplice. Esiste allora uno spazio omogeneo* $S = G/H$, *corrispondente alla coppia di Klein* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_+)$, *di modo che:*

1. *Ogni varietà CR di tipo* $\mathfrak{m}$ *ammette un'unica geometria di Cartan* $\mathcal{C}$ *modellata su* S *ammissibile e normale.*

2. *Un diffeomorfismo* $f : M \to M'$ *tra due varietà CR di tipo* $\mathfrak{m}$ *è un isomorfismo CR se e solo se* f *è un isomorfismo tra* $\mathcal{C}$ *e* $\mathcal{C}'$.

Quindi assegnata una varietà M, *vi è una naturale corrispondenza biunivoca tra strutture CR fortemente regolari di tipo* $\mathfrak{m}$ *e geometrie di Cartan normali modellate su* S, *che conserva i rispettivi isomorfismi.*

Parte della tesi è dedicata ad un'analisi dei modelli omogenei S per cui sussiste il risultato precedente. Convenendo di chiamare CR-ammissibili tali modelli, abbiamo dimostrato:

TEOREMA 2. – *Sia* $S = G/H$ *una varietà omogenea tale che* $Lie(G) = \mathfrak{g}$ *e* $Lie(H) = \mathfrak{g}_+$. *Si assuma che per ogni* $a \in H$, $Ad(a) \in Aut(\mathfrak{g})$ *preservi la filtrazio-*

ne naturale $\mathfrak{g}_{(i)}$ *di* $\mathfrak{g}$ *associata alla struttura graduata, cioè* $\mathfrak{g}_{(i)} := \bigoplus_{k \geqslant i} \mathfrak{g}_k$. *Allora sono equivalenti:*

a) *S è un modello CR-ammissibile;*

b) *La varietà CR fondamentale* $M(\mathfrak{m})$ *di tipo* $\mathfrak{m}$ *ammette un'unica geometria di Cartan normale ed ammissibile modellata su* S.

c) *La rappresentazione di isotropia* $\varrho : H \to GL(\mathfrak{m})$ *di* S *soddisfa*

$$\varrho(H_o) = G_0(\mathfrak{m}, J)$$

essendo $H_o = \{a \in H \,|\, Ad(a)\, \mathfrak{g}_p = \mathfrak{g}_p \ \ \forall p \in \mathbf{Z}\}$.

Si è anche dimostrato che, nel caso in cui $\mathfrak{g}$ sia semplice di tipo reale, ed in molti casi in cui $\mathfrak{g}$ è semplice di tipo complesso, la geometria di Cartan di cui nel Teorema 1 è una *geometria parabolica* secondo la recente definizione di A. Čap e H. Schichl [1]. Si noti anche il

TEOREMA 3. – *La geometria di Cartan canonica di una varietà CR di tipo* $\mathfrak{m}$ *non è mai a curvatura costante, fatta eccezione per il caso piatto.*

Osserviamo che nel caso della geometria Riemanniana, che è la geometria di Cartan senza torsione avente per modello lo spazio Euclideo (cfr. [4]), l'analogo di questo teorema è chiaramente falso. È noto peraltro che le space forms Riemanniane sono tutte spazi simmetrici. È naturale quindi porre il problema dell'esistenza di varietà CR di tipo $\mathfrak{m}$ non piatte secondo Cartan, che siano spazi CR-simmetrici (cfr. [2]). La risposta affermativa a questo problema è fornita nel capitolo finale della tesi, in cui si è introdotta una nuova, ampia classe di esempi di varietà CR simmetriche ottenute come orbite minime in varietà bandiera complesse $X = G^{\mathbf{C}}/Q$ per l'azione di una opportuna forma reale G di $G^{\mathbf{C}}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] ČAP A., SCHICHL H., *Parabolic geometries and canonical Cartan connections*, Hokkaido Math. J., **29** (2000), 453-505.

[2] KAUP W., ZAITSEV D., *On Symmetric Cauchy-Riemann Manifolds,* Adv. Math., **149** (2000), 145-181.

[3] MEDORI C., NACINOVICH M., *Levi-Tanaka algebras and homogeneous CR manifolds,* Compositio Math., **109** (1997), 195-250.

[4] SHARPE R.W., *Differential geometry. Cartan's generalization of Klein's Erlangen program,* Springer-Verlag, New York (1997).

[5] TANAKA N., *On non-degenerate real hypersurfaces, graded Lie algebras and Cartan connections,* Japan. J. Math., **20** (1976), 131-190.

[6] TANAKA N., *On differential systems, graded Lie algebras and pseudogroups,* J. Math. Kyoto Univ., **10** (1970), 1-82.

Dipartimento Interuniversitario di Matematica, Università di Bari
e-mail: lotta@dm.uniba.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Pisa) - Ciclo XII
Direttore di ricerca: Prof. Mauro Nacinovich, Università di Pisa