Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Paola Marcolongo

Risolubilità e non-risolubilità di equazioni alle derivate parziali negli spazi Gevrey

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **4-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2001), n.3 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 495–498.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2001_8_4A_3_495_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2001.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. IV-A, Dicembre 2001, 495-498

Risolubilità e non-risolubilità di equazioni alle derivate parziali negli spazi Gevrey.

PAOLA MARCOLONGO

Questa tesi affronta i problemi della risolubilità e della non-risolubilità in ambito Gevrey di alcune classi di equazioni alle derivate parziali.

La prima parte è dedicata ad equazioni alle derivate parziali semilineari anisotrope, con caratteristiche di arbitraria molteplicità, della forma seguente:

$$P(x, D)\, u + F(x, \partial^\alpha u)_{|\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \sigma_j + \alpha_n < m} = f(x).$$

In via preliminare, si è proceduto allo studio approfondito dell'equazione lineare associata:

$$P(x, D)\, u = f(x),$$

dove

$$P(x, D)\, u = \sum_{\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \sigma_j + \alpha_n \leq m} a_\alpha(x)\, D^\alpha u$$

$\sigma' = (\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1})$, $\sigma_j \geq 1$, $\sigma_n = 1$, $D := -i\partial$.

Ricordiamo che $\mathcal{G}^\sigma(\Omega)$, spazio Gevrey anisotropo di ordine $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, è costituito da tutte le funzioni $f(x)$ soddisfacenti localmente maggiorazioni del tipo

$$|\partial^\alpha f(x)| \leq C^{|\alpha|+1} (\alpha_1 !)^{\sigma_1} \dots (\alpha_n !)^{\sigma_n}.$$

Al fine di studiare la risolubilità Gevrey dell'operatore P, si introducono gli spazi Gevrey-Sobolev anisotropi $\mathbb{H}^{s,\,\psi}_{\tau,\,\sigma',\,r}(\Omega)$, costituiti da tutte le funzioni $f \in L^2(\Omega)$ tali che:

$$\|f\|_{\mathbb{H}^{s,\,\psi}_{\tau,\,\sigma',\,r}} := \|e^{\tau\psi(x_n,\, D')} f\|_{H^s_{1/\sigma'}} < +\infty$$

dove σ' è l'ordine Gevrey anisotropo, $s > 0$ è l'indice di Sobolev, $r \in (0, 1)$, $\Omega = (-\delta, \delta) \times \mathbb{R}^{n-1}$ e ψ è una funzione che soddisfa le stime seguenti:

$$|D^j_{x_n} D^{\beta'}_{\xi'} \psi(x_n, \xi')| \leq C_{j,\beta'} \langle \xi' \rangle_{1/\sigma'}^{r - \beta_1\sigma_1 - \dots - \beta_{n-1}\sigma_{n-1}}.$$

con $\langle \xi' \rangle_{1/\sigma'} := \sum_{j=1}^{n-1} (1 + |\xi_j|^2)^{1/2\sigma_j}$. Gli spazi Sobolev anisotropi $H^s_{1/\sigma'}$ sono definiti in modo standard.

Dopo aver provato risultati di tipo tecnico abbiamo dimostrato i seguenti due teoremi, determinanti per l'analisi del nostro problema.

TEOREMA 1. – *Per* $\bar{\sigma} = (\sigma_1/r, \dots, \sigma_{n-1}/r, \bar{\sigma}_n)$, $r \in (0, 1)$, $\bar{\sigma}_n > 1$ *arbitrari, data* $f \in \mathcal{G}^{\bar{\sigma}}_0(\Omega)$ *esiste* $\tau > 0$ *tale che, per ogni* $s > 0$ *risulta* $f \in \mathbb{H}^{s,\,\psi}_{\tau,\,\sigma',\,r}(\Omega)$.

TEOREMA 2. – *Se* ψ *è una funzione peso essenzialmente sub-additiva rispetto a* ξ', *cioè* $\psi(x_n, \xi' + \eta') \leqslant \psi(x_n, \xi') + \psi(x_n, \eta') + C$, *e* s *è sufficientemente grande, allora* $\mathbb{H}^{s;\,\psi}_{\tau,\,\sigma',\,r}(\Omega)$ *è un'algebra.*

Il principale risultato concernente la risolubilità dell'equazione lineare, in una forma semplificata, è il seguente:

TEOREMA 3. – *Si consideri l'equazione*

$$P(x, D)\, u = f \in \mathcal{G}_0^{\overline{\sigma}}(\Omega), \tag{1}$$

dove $\overline{\sigma}$ *e* $P(x, D)$ *sono definiti come in precedenza. Si supponga che i coefficienti* $a_\alpha(x)$ *siano analitici; si consideri il simbolo principale anisotropo*

$$\overline{p}_m(x, \xi) := \sum_{\Sigma_{j=1}^{n-1} \alpha_j \sigma_j + \alpha_n = m} a_\alpha(x)\, \xi^\alpha$$

e si supponga che il simbolo di P *possa essere scritto nel modo seguente* $p(x, \xi) = \overline{p}_m(x, \xi) + q_{m-\varepsilon}(x, \xi)$, *con* $q_{m-\varepsilon}(x, D)$ *contenente derivate* D^α *fino all'ordine anisotropo* $m - \varepsilon$, $0 < \varepsilon \leqslant 1$. *Si supponga che* $\overline{p}_m(x, \xi)$ *soddisfi le seguenti condizioni:*

– *per ogni* (x_0, ξ_0) *appartenente alla varietà caratteristica anisotropa, esista un intorno conico quasi omogeneo* Γ *in cui si possa scrivere*

$$\overline{p}_m(x, \xi) = e_{m-k}(x, \xi) \prod_{j=1}^{k} (\xi_n + v_1^{(j)}(x, \xi'))$$

dove $e_{m-k}(x, \xi)$ *è quasi ellittico, analitico in* x, *quasi omogeneo in* ξ' *e* $v_1^{(j)}(x, \xi')$ *sono analitici in* x *e quasi omogenei in* ξ'.

– $\Im m\ (v_1^{(j)}(x, \xi')) \geqslant 0$ (*alternativamente* $\leqslant 0$) *in* Γ, *per ogni* j.

Si supponga che nell'espressione di $\overline{\sigma} = (\sigma_1/r, \ldots, \sigma_{n-1}/r, \overline{\sigma}_n)$ *si abbia*

$$\max\left\{\frac{1}{2}, \frac{k-\varepsilon}{k}\right\} < r < 1\,;$$

allora esiste una soluzione microlocale u *di* (1). *Più precisamente, per un'opportuna fissata* ψ, *si può scrivere* $f \in \mathbb{H}^{s;\,\psi}_{\tau,\,\sigma',\,r}(\Omega)$ *e ottenere* $u \in \mathbb{H}^{s+m-k(1-r),\,\psi}_{\tau,\,\sigma',\,r}(\Omega)$.

Per quel che riguarda l'equazione semilineare

$$P(x, D)\, u + F(x, \partial^\alpha u)_{|\,\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \sigma_j + \alpha_n \leqslant m - \varepsilon} = \mu f(x) \tag{2}$$

abbiamo ottenuto il seguente risultato.

TEOREMA 4. – *Sia* $f(x) \in \mathcal{G}_0^{\overline{\sigma}}(\Omega)$. *Si supponga che valga una delle seguenti due ipotesi:*

1. *per ogni* (x_0, ξ_0) *nella varietà caratteristica anisotropa esista un intorno* Γ *in cui* $\Im m\ v_1^{(j)}(x, \xi') \geqslant 0$, *per ogni* $j = 1, \ldots, k$ *e per ogni intorno;*

2. *per* $(x_1, x_2) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ *il simbolo principale anisotropo si possa scrivere nel modo seguente:*

$$\overline{p}_m(x, \xi) = e_{m-k}(x, \xi) \prod_{j=1}^{k} (\xi_2 - sign\, \xi_1 \lambda_j(x) \, |\xi_1|^{\frac{1}{\sigma_1}}),$$

con $\Im m \lambda_j(x) \geqslant 0$ *per ogni* j *e* $e_{m-k}(x, \xi)$ *quasi ellittico.*

Si supponga che il termine nonlineare sia analitico in x, *intero in* $\partial^\alpha u$ *e* $F(x, 0) = 0$. *Allora, per* r *determinato come nel Teorema* 3, *l'equazione* (2) *ammette una soluzione classica in* $\{|x| < \delta\}$, *per* μ *e* δ *sufficientemente piccoli.*

Considerando le classi Gevrey standard $\mathcal{G}^\lambda(\Omega)$, $\lambda > 1$, e considerando l'ovvia inclusione in $\mathcal{G}^{\overline{\sigma}}$, si può concludere sotto le precedenti ipotesi che le equazioni (1) e (2) sono risolubili per $f \in \mathcal{G}_0^{\min\{\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}\}/r}(\Omega)$.

Se $\sigma_j = 1$ per ogni j si riottengono i risultati in [2], articolo a cui ci siamo ispirati per l'utilizzo della tecnica del coniugio, adattata al caso anisotropo mediante opportuni risultati sul calcolo simbolico. Per maggiori dettagli si veda [4].

La seconda parte della tesi è dedicata a problemi di non risolubilità in ambito Gevrey per alcuni operatori lineari del tipo precedente.

In particolare abbiamo considerato l'equazione

$$D_{x_1}^m u - A(x_1) D_{x_2}^{m-1} u - B(x_1)\, D_{x_2}^{m-2} D_{x_1} u = f, \tag{3}$$

dove m è un numero dispari, $m \geqslant 3$, $A(x_1)$ e $B(x_1)$ sono funzioni analitiche in un intorno di $x_1 = 0$ con $\Im m A(x_1) = c x_1^{2h} + o(x_1^{2h})$ per $x_1 \to 0$, $c \neq 0$. Osservando che l'operatore a primo membro può essere considerato come operatore anisotropo, applicando i teoremi precedenti otteniamo risolubilità Gevrey per indici $s < \dfrac{m}{m-2}$. A questo punto è naturale chiedersi che cosa si può dire per i valori $s \geqslant \dfrac{m}{m-2}$.

Più precisamente si vuole analizzare l'estendibilità alle classi di Gevrey dei risultati «negativi» in C^∞ di [5]. A tal fine riportiamo la versione Gevrey, dovuta a Corli [1], della condizione di Hörmander sulla risolubilità di un operatore, con l'utilizzo di norme Gevrey standard.

TEOREMA 5. – *Sia* $1 < s < +\infty$ *un numero reale fissato. Sia* P *un operatore s-risolubile in* Ω. *Allora per ogni compatto* K *di* Ω, *per ogni* $\eta > \varepsilon > 0$, *esiste una costante positiva* C *tale che*

$$\left(\max_{x \in K} |f(x)|\right)^2 \leqslant C \|f\|_{K, \frac{1}{\eta - \varepsilon}} \|{}^t P f\|_{K, \frac{1}{\eta - \varepsilon}} \tag{4}$$

per ogni $f \in \mathcal{G}_0^s\left(\Omega, K, \dfrac{1}{\eta}\right)$.

Il teorema verrà applicato nel modo seguente: un operatore P non è s-risolubile in x_0 se l'equazione trasposta ${}^t P f = 0$ ammette un'opportuna successione di soluzioni approssimate che rendono il secondo membro di (4) arbitrariamente piccolo e lasciano il primo membro limitato dal basso.

Utilizzando il precedente risultato e dando un'opportuna versione dei risultati presenti in [3] abbiamo dimostrato, sotto ipotesi opportune per il coefficiente $B(x_1)$, che l'equazione considerata non è s-risolubile per

$$s > \frac{m}{m-2} + \Theta(h) \tag{5}$$

con $\Theta(h)$ infinitesima per $h \to +\infty$.

Infine siamo passati allo studio di una estensione dell'operatore di Mizohata. Precisamente si considera:

$$L := \partial_{x_1} + ib(x_1)\,\partial_{x_2}$$

dove $b(x_1) \in \mathcal{G}^{s'}(\mathbb{R})$, $s' \geqslant 1$, $b(0) = 0$, $b(x_1) > 0$ per $x_1 < 0$, $b(x_1) < 0$ per $x_1 > 0$. L'ordine dello zero nell'origine può essere infinito, generalizzando quanto già noto nel caso $b(x_1) = -x_1^{2h+1}$.

Abbiamo dimostrato che L non è s-risolubile per $s > s'$.

BIBLIOGRAFIA

[1] CORLI A., *On local solvability of linear partial differntial operators with multiple characteristics,* J. Diff. Eq., **81** (1989), 275-293.

[2] GRAMCHEV T., RODINO L., *Gevrey solvability for semilinear partial differential equations with multiple characteristics,* Boll. U.M.I. B, **2** (1999), 65-120.

[3] IVRII V. Y., *Conditions for correctness in Gevrey classes of the Cauchy problem for weakly hyperbolic equations,* Sib. Math. J., **17,** (1976), 422-435.

[4] MARCOLONGO P., OLIARO A. , *Local solvability for semilinear anisotropic partial differential equations,* Ann. di Mat. Pura e Appl. (IV), **179,** (2001), 229-262.

[5] POPIVANOV P.R., *Local solvability of some classes of linear differential operators with multiple characteristics,* Ann. Univ. Ferrara, Sez. VII-Sc. Mat., **45** (1999), 263-274.

Dipartimento di Matematica, Università di Torino
e-mail: paola@dm.unito.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Genova) - Ciclo XII
Direttore di ricerca: Prof. L. Rodino, Università di Torino