Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Manuela Molinari

Soluzioni di viscosità e stabilità per equazioni completamente nonlineari

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **4-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2001), n.3 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 507–510.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2001_8_4A_3_507_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2001.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. IV-A, Dicembre 2001, 507-510

Soluzioni di viscosità e stabilità per equazioni completamente nonlineari.

MANUELA MOLINARI

In questa tesi sono state considerate equazioni paraboliche del secondo ordine «fully nonlinear» della forma

$$u_t + F(Du, D^2 u) = 0, \tag{1}$$

dove $u = u(x, t)$, $x \in \mathbb{R}^N$, $t > 0$ e F è una funzione regolare verificante la seguente condizione:

$$F(p, M) \leq F(p, N) \quad \text{se } M \geq N \text{ per ogni } p \in \mathbb{R}^N, \tag{2}$$

con M ed N matrici simmetriche. In particolare, sono stati studiati due problemi relativi all'equazione (1), vale a dire l'esistenza di soluzioni di viscosità per le equazioni che descrivono l'evoluzione di superfici in $\mathbb{R}^N$ con velocità dipendente dalla curvatura di Gauss e la stabilità asintotica di onde viaggianti di (1) in una dimensione di spazio.

1. – Evoluzione di ipersuperfici secondo la curvatura gaussiana.

Lo studio dell'evoluzione di ipersuperfici in $\mathbb{R}^N$ con velocità dipendente dalla curvatura è collegato a molti fenomeni fisici, chimici e biologici in cui si hanno variazioni nella dimensione e nella forma degli oggetti, come per esempio nella crescita di cristalli, nello sviluppo di cellule, nella propagazione di fiamme e fronti d'onda e nei processi di transizione di fase di alcuni materiali. Da un punto di vista classico una soluzione per le equazioni che descrivono questo tipo di moto non è, in generale, globale nel tempo a causa del blow-up della curvatura che determina la formazione di singolarità. Dal momento che molte situazioni fisiche mostrano che l'evoluzione secondo curvatura continua anche dopo la nascita di punti singolari, è naturale pensare di generalizzare la soluzione classica introducendo un'appropriata formulazione debole del problema. Un'idea per costruire una soluzione generalizzata al moto secondo la curvatura gaussiana è quella di applicare la teoria delle soluzioni di viscosità, introdotta negli ottanta da Crandall, Ishii e Lions. L'uso di tale teoria presenta notevoli vantaggi sia perché permette a funzioni che siano anche soltanto semicontinue di essere soluzioni di equazioni del secondo ordine «fully nonlinear», sia per la generalità in cui è possibile ottenere risultati di esistenza e unicità, sia perché sono molto flessibili nel passaggio al limite di funzioni nonlineari. Nel dimostrare l'esistenza di soluzioni di viscosità per l'evoluzione secondo la curvatura gaussiana [5], abbiamo seguito l'approccio introdotto da Evans e Spruck [3] e, indipendentemente, da Chen, Giga e Goto [2] nel caso di evoluzione secondo la curvatura media, che consiste nel rappresentare la superficie iniziale $\Gamma_0 \subset \mathbb{R}^N$ che si vuole studiare, come l'insieme di livello di una funzione continua $u_0 \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, vale a dire

$$\Gamma_0 = \{x \in \mathbb{R}^N \colon u_0(x) = 0\}.$$

Poiché la curvatura gaussiana è data dal prodotto delle $N-1$ curvature principali della superficie, una possibile rappresentazione dell'evoluzione è data dalla famiglia $\{\Gamma_t\}_{t \geq 0}$, dove

$$\Gamma_t = \{x \in \mathbb{R}^N \colon u(x, t) = 0\}$$

e u è la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t = |Du| \prod_{i=1}^{N-1} \lambda_i(Du, D^2 u) \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \tag{3}$$

dove $\lambda_i(Du, D^2 u)$, $i = 1, \ldots, N-1$ sono gli autovalori della matrice $D\left(\frac{Du}{|Du|}\right) = \frac{1}{|Du|}\left(I - \frac{Du \otimes Du}{|Du|^2}\right) D^2 u$ associati agli autovettori che giacciono nell'iperpiano complementare a Du e rappresentano le curvature principali della superficie di livello $\Gamma_t = \{x \in \mathbb{R}^N \colon u(x, t) = 0\}$. La nostra principale difficoltà è stata il fatto che la funzione

$$F(Du, D^2 u) = |Du| \prod_{i=1}^{N-1} \lambda_i(Du, D^2 u) \tag{4}$$

non verifica in generale la condizione di monotonia (2) necessaria per applicare la teoria della soluzioni di viscosità e quindi è stato necessario introdurre un problema modificato per il quale tale condizione valesse. Abbiamo definito la funzione

$$F^+(p, M) = |p| \prod_{i=1}^{N-1} \lambda_i^+(p, M) \tag{5}$$

dove $\lambda_i^+(p, M)$ denota la parte positiva degli autovalori e abbiamo considerato il problema

$$\begin{cases} u_t = F^+(Du, D^2 u) \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases} \tag{6}$$

Abbiamo provato che una superficie strettamente convessa rimane strettamente convessa nell'evoluzione secondo la curvatura gaussiana e che, come conseguenza, i problemi (3) e (6) sono equivalenti nella classe delle funzioni strettamente convesse. Così abbiamo ristretto a questa classe la nostra discussione e abbiamo provato che esiste un'unica soluzione di viscosità strettamente convessa per il problema (6) che descrive il moto. In questo modo è stato possibile definire un'evoluzione generalizzata secondo la curvatura gaussiana che esiste per tutti i tempi e che coincide con l'evoluzione classica fino a quando quest'ultima esiste.

2. – Stabilità di onde viaggianti.

Le onde viaggianti sono particolari soluzioni dell'equazione

$$u_t + F(u_x, u_{xx}) = 0, \tag{7}$$

della forma $v(x, t) = \varphi(x - st)$, dove s è la velocità dell'onda. Tali soluzioni conservano la loro forma ed evolvono traslando in una fissata direzione e connettendo due stati all'infinito $\varphi^{\pm}$. Molti fenomeni fisici e chimichi possono essere modellati da onde viaggianti, come per esempio, la dinamica dei fluidi e dei gas, il comportamento di materiali, le onde di shock e gli impulsi nervosi. In particolare, ci siamo occupati della proprietà di stabilità asintotica in norma $L^{\infty}(\mathbb{R})$ di onde viaggianti per (7). Tale problema è stato ricondotto allo studio della stabilità asintotica in norma $L^1(\mathbb{R})$ di onde viaggianti per l'equazione

$$v_t + F(v, v_x)_x = 0, \tag{8}$$

che si ottiene differenziando la precedente rispetto a x e ponendo $u_x = v$. Tale formulazione risulta più semplice da studiare in virtù della sua forma di divergenza. Il problema consiste nel dimostrare che se v è soluzione di

$$\begin{cases} v_t + F(v, v_x)_x = 0 \\ v(x, 0) = \varphi(x) + \psi(x), \end{cases} \tag{9}$$

dove φ è l'onda viaggiante e ψ una perturbazione di φ in $L^1(\mathbb{R})$, allora v verifica

$$\lim_{t \to +\infty} \|v(\cdot, t) - \varphi(\cdot - st + \delta)\|_{L^1(\mathbb{R})} = 0, \tag{10}$$

per un opportuno shift $\delta > 0$. La stabilità per (8) è stata ampiamente studiata nel caso di leggi di conservazione scalari, vale a dire per F della forma $F(p, M) = f(p) - M$. In tale ambito i principali risultati sono stati ottenuti da Osher e Ralston nel caso di dati iniziali limitati, usando essenzialmente le proprietà del semigruppo associato all'equazione e successivamente da Freisthueler and Serre nel caso generale, cioè senza restrizione sui dati iniziali. Il nostro contributo riguarda l'estensione di tali risultati di stabilità al caso in cui F è una funzione nonlineare soddisfacente le seguenti ipotesi di struttura

(H1) $F_M(p, M) \leqslant -\alpha$ per qualche $\alpha > 0$, per ogni $(p, M) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;

(H2) $F_{MM}(p, M) \geqslant 0$ per ogni $(p, M) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Inizialmente abbiamo provato l'esistenza di onde viaggianti per (9), usando condizioni analoghe a quelle di Rankine-Hugoniot e a quella di entropia di Oleinik nel caso di leggi di conservazione. Successivamente abbiamo ottenuto il risultato di stabilità (10) prima nel caso in cui il dato iniziale $v(x, 0) = \varphi(x) + \psi(x)$ fosse limitato da due traslazioni dell'onda viaggiante, cioè sotto l'ipotesi

$$\varphi(x+\alpha) \leqslant \varphi(x) + \psi(x) \leqslant \varphi(x+\beta), \tag{11}$$

poi, nella parte finale, tale restrizione sul dato iniziale è stata rimossa per ottenere così la stabilità nel caso generale. Il passo cruciale qui è stata la prova della stabilità nel caso di stati stazionari, cioè per onde viaggianti costanti. Tale risultato, poi, insieme alle proprietà di semigruppo dell'equazione, ha permesso di controllare il comportamento della parte del dato iniziale non compresa tra le traslazioni dell'onda. In questo punto è stata fondamentale l'ipotesi (H2) che ha reso possibile avere un controllo della nonlinearità del termine del secondo ordine. Infine, grazie alla ben nota relazione tra leggi di conservazione e equazioni di Hamilton-Jacobi, abbiamo mostrato come la stabilità di onde viaggianti per (8) in norma $L^1(\mathbb{R})$ permetta di ottenere la stabilità in norma $L^\infty(\mathbb{R})$ di onde viaggianti per equazioni nonlineari del tipo

$$u_t + F(u_x, u_{xx}) = 0. \tag{12}$$

BIBLIOGRAFIA

[1] CAMILLI F. e MOLINARI M., *Large time stability of travelling waves for a class of fully-nonlinear parabolic equations,* Quart. Appl. Math., in corso di stampa.

[2] CHEN Y. G., GIGA Y. e GOTO S., *Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equations,* J. Differential Geom., **33** (1991), 749-786.

[3] EVANS L. C. e SPRUCK J., *Motion of level sets by mean curvature (1),* J. Differential Geom., **33** (1991), 635-681.

[4] FREISTUEHLER H. e SERRE D., *L^1 stability of shock waves in scalar viscous conservation laws,* Comm. Pure Appl. Math., **51** (1998), 291-301.

[5] MARCATI P. e MOLINARI M., *Evolution of hypersurfaces in $\mathbb{R}^N$ by Gaussian curvature,* NoDEA Nonlinear Differ. Equ. Appl., **6** (1999), 119-132.

Via Roma, 18, 67100 L'Aquila
e-mail: manuela.molinari510tin.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Genova) - Ciclo XII
Direttore di ricerca: Prof. Pierangelo Marcati, Università di L'Aquila