Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Alessandro Oliaro

Risolubilità e ipoellitticità per equazioni differenziali a derivate parziali semilineari con caratteristiche multiple

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **4-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2001), n.3 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 519–522.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2001_8_4A_3_519_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2001.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. IV-A, Dicembre 2001, 519-522

Risolubilità e ipoellitticità per equazioni differenziali a derivate parziali semilineari con caratteristiche multiple.

ALESSANDRO OLIARO

In questa tesi di Dottorato ho studiato alcune problematiche riguardanti equazioni differenziali a derivate parziali lineari e semilineari: in particolare, mi sono occupato di risolubilità locale C^∞ (per ogni dato C^∞ esiste una soluzione locale in $\mathcal{D}'$) e Gevrey (per ogni dato G^s esiste una soluzione locale in $\mathcal{D}'_s$), e di ipoelliticità C^∞ ($Pu \in C^\infty \Rightarrow u \in C^\infty$) e Gevrey ($Pu \in G^s \Rightarrow u \in G^s$).

Dato $P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha(x) D^\alpha$, diciamo che $p_m(x, \xi) := \sum_{|\alpha| = m} c_\alpha(x) \xi^\alpha$ è il «simbolo principale» e $\Sigma := \{(x, \xi) \in \Omega \times (\mathbf{R}^n \setminus \{0\}) : p_m(x, \xi) = 0\}$ è la «varietà caratteristica». Gli operatori studiati in questa tesi di Dottorato hanno caratteristiche multiple, cioè sono tali per cui, in qualche punto della varietà caratteristica, tutte le derivate del simbolo principale si annullano. È noto che un operatore ellittico (cioè tale che $\Sigma = \emptyset$) è anche ipoellittico e localmente risolubile; esiste inoltre una condizione necessaria e sufficiente (Nirenberg-Trèves) per la risolubilità C^∞ di operatori di tipo principale (cioè tali che $d_\xi \Re p_m(x, \xi) \neq 0$ per ogni $(x, \xi) \in \Sigma$). Una condizione analoga tuttavia non esiste per gli operatori con caratteristiche multiple; inoltre in questo caso le proprietà di risolubilità e di ipoellitticità dipendono dai termini di ordine inferiore (della cui influenza diversi risultati dimostrati nella tesi tengono conto, cf. paragrafi 2 e 3).

Ricordiamo la definizione di spazi Gevrey $G^s(\Omega)$. Dato un aperto $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ diciamo che $f \in G^s(\Omega)$ se $f \in C^\infty(\Omega)$ e per ogni compatto $K \subset \Omega$ si ha $\max_{x \in K} |\partial_x^\alpha f(x)| \leq C_K^{|\alpha|+1}(\alpha!)^s$, per ogni $\alpha \in \mathbf{Z}_+^n$, $\partial_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$. Vale la seguente proprietà:

$$\mathcal{A}(\Omega) = G^1(\Omega) \subset \ldots \subset G^s(\Omega) \subset G^t(\Omega) \subset \ldots \subset C^\infty(\Omega) \quad \text{per} \quad s \leq t, \tag{1}$$

essendo $\mathcal{A}(\Omega)$ lo spazio delle funzioni analitiche su Ω.

È noto che esistono operatori localmente risolubili in $\mathcal{A}$ ma non in C^∞: visto che vale (1), per questi operatori è ragionevole studiare la risolubilità G^s (cf. [5]).

Nei prossimi paragrafi sono contenuti i principali risultati dimostrati nella tesi.

1. – Risolubilità locale sotto ipotesi sul simbolo quasi-principale.

Nella prima parte della tesi (cf. [3] e [4]) si studiano equazioni (anisotrope) del tipo

$$\overbrace{\sum_{\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \sigma_j + \alpha_n \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha u}^{P(x, D) u} + F(x, \partial^\alpha u)_{|\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \sigma_j + \alpha_n < m} = \mu f(x), \quad \sigma_j \geq 1. \tag{2}$$

Indichiamo con $\bar{p}_m(x, \xi) := \sum_{\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \sigma_j + \alpha_n = m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$ il simbolo «quasi-principale» di $P(x, D)$; avremo quindi la varietà caratteristica anisotropa $\bar{\Sigma} := \{(x, \xi)$ tali che

$\overline{p}_m(x, \xi) = 0,\ \xi \neq 0\}$. Possiamo scrivere il simbolo $p(x, \xi)$ di $P(x, D)$ come:

$$p(x, \xi) = \overline{p}_m(x, \xi) + \sum_{\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \sigma_j + \alpha_n \leq m - \varepsilon} a_\alpha(x)\, \xi^\alpha. \tag{3}$$

TEOREMA 1.1. – *Supponiamo che i coefficienti $a_\alpha(x)$ di $P(x, D)$ siano analitici; inoltre una delle seguenti condizioni sia verificata:*

(a) per ogni $(x_0, \xi_0) \in \Sigma$ esiste un intorno conico Γ in cui si ha: $\overline{p}_m(x, \xi) = e_{m-k}(x, \xi) \prod_{j=1}^{k} (\xi_n + v_1^j(x, \xi'))$, dove e_{m-k} è quasi ellittico, e inoltre $\Im v_1^j(x, \xi') \geq 0$ (o ≤ 0), con segno costante per ogni $j = 1, \ldots, k$ e in un intorno Γ di ogni punto di Σ.

(b) per $(x_1, x_2) \in \Omega \subset \mathbf{R}^2$ il simbolo quasi-principale $\overline{p}_m(x, \xi)$ ha la forma seguente: $\overline{p}_m(x, \xi) = e_{m-k}(x, \xi) \prod_{j=1}^{k} (\xi_2 - \operatorname{sign} \xi_1 \lambda_j(x) |\xi_1|^{\frac{1}{\sigma_1}})$, con $e_{m-k}(x, \xi)$ quasi ellittico e $\Im \lambda_j(x) \geq 0$ per ogni j.

Chiediamo inoltre che $F(x, z)$ sia analitica in x, intera in z, e $F(x, 0) = 0$.

Sia $\Omega = \{|x| < \delta\}$. Il dato $f(x)$ è preso nello spazio $G_0^s(\Omega)$, $s < \dfrac{\min\{\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}\}}{\max\left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{k-\varepsilon}{k}\right\}}$, dove ε è dato da (3) e k dall'espressione di $\overline{p}_m(x, \xi)$ in (a) o (b).

Sotto queste ipotesi esiste una soluzione classica dell'equazione (2) in Ω per μ e δ sufficientemente piccoli.

La tecnica usata per dimostrare questo teorema (che generalizza al caso anisotropo un risultato dimostrato in [1]) si basa sull'analisi del seguente operatore «coniugato»:

$$\widetilde{P}(x, D) = e^{\tau\psi(x_n, D')} P(x, D)\, e^{-\tau\psi(x_n, D')}, \tag{4}$$

dove $D' = (D_{x_1}, \ldots, D_{x_{n-1}})$, $\tau > 0$, e $\psi(x_n, \xi')$ è una funzione positiva che soddisfa $|D_{x_n}^j D_{\xi'}^{\beta'} \psi(x_n, \xi')| \leq C_{j\beta'} \langle \xi' \rangle_{\sigma'}^{r - \beta_1\sigma_1 - \ldots - \beta_{n-1}\sigma_{n-1}}$, con $\langle \xi' \rangle_{\sigma'} = \sum_{j=1}^{n-1} (1 + |\xi_j|^2)^{\frac{1}{2\sigma_j}}$. Una delle maggiori difficoltà consiste nel ricavare esplicitamente (a meno di «resti» di ordine sufficientemente basso) l'espressione di $\widetilde{P}(x, D)$: per fare questo è necessario un calcolo simbolico per l'operatore coniugato. Per una scelta opportuna di $\psi(x_n, \xi')$, si ottiene risolubilità C^∞ per $\widetilde{P}(x, D)$ e conseguentemente risolubilità G^s per $P(x, D)$.

L'equazione semilineare è trattata con tecniche di punto fisso.

2. – Risolubilità locale e ipoellitticità sotto ipotesi sul simbolo quasi-principale e sui termini di ordine inferiore.

Dal Teorema 1.1 si ha che, per $x = (x_1, x_2)$ e $m \geq 3$, l'operatore

$$P(x, D) = D_{x_2}^m - D_{x_1}^{m-1} + \sum_{l\frac{m}{m-1} + j < m} a_{lj}(x)\, D_{x_1}^l D_{x_2}^j, \quad a_{lj}(x) \in \mathcal{A}(\mathbf{R}^2), \tag{5}$$

è G^s-localmente risolubile in $x = 0$ per $s < \dfrac{m}{m-2}$. Questo risultato è forte, perché è stato dimostrato (Corli, 1989) che $Q = D_{x_2}^m - D_{x_1}^{m-1} + iyD_{x_1}^{m-2} D_{x_2}$ non è G^s-localmente risolubile in $x=0$ per $s > \frac{m}{m-2}$. La non risolubilità di Q è dovuta alla presenza del termine $iyD_{x_1}^{m-2}D_{x_2}$, in cui la parte immaginaria del coefficiente cambia di segno in un qualunque intorno dell'origine. Ci si chiede se, con ipotesi aggiuntive sui termini di ordine inferiore, è possibile ottenere un risultato più forte di risolubilità per l'operatore (5). Più in generale, si considera la classe di equazioni

$$\overbrace{D_{x_2}^m u + a_{d0}(x)\, D_{x_1}^d u + \sum_{l\frac{m}{d}+j<m} a_{lj}(x)\, D_{x_1}^l D_{x_2}^j u}^{P(x,\,D)\,u} + F(x,\, \partial_{x_1}^l \partial_{x_2}^j u)_{|l\frac{m}{d}+j\leq t^*} = \mu f(x), \tag{6}$$

$m,\, d \in \mathbf{Z}_+$, $d<m$, $t^*<m$, $x\in\Omega$. Per queste equazioni si dimostrano risultati di risolubilità e ipoelliticità C^∞ (Teorema 2.1) e di risolubilità Gevrey (Teorema 2.2).

TEOREMA 2.1. – *Sia* $\Re a_{d0}(0)\neq 0$. *Supponiamo che esista un termine* $a_{l^*j^*}(x)\, D_{x_1}^{l^*} D_{x_2}^{j^*}$, *con* $m-\frac{1}{2} < l^*\frac{m}{d}+j^* = t^* < m$, *tale che:*

(i) $\Im a_{l^*j^*}(x)\neq 0$;

(ii) per ogni punto di $\overline{\Sigma} := \{(x,\xi) : \xi_2^m + a_{d0}(x)\,\xi_1^d = 0,\ \xi\neq 0\}$ *esiste un intorno conico* Γ *in cui* $\Im a_{lj}(x)\, \Im a_{l^*j^*}(x)\, \xi_1^{l+l^*} \xi_2^{j+j^*} \geq 0$ *per ogni* $t^* < l\frac{m}{d}+j \leq m$.

Inoltre chiediamo che $F(x,z)$ *sia* C^∞ *in* x *e intera in* z, $F(x,0)=0$. *Allora esiste una soluzione classica di* (6) *in* $\Omega = \{|x|<\delta\}$, *per ogni dato* $f(x)\in C_0^\infty(\Omega)$, *se* μ *e* δ *sono sufficientemente piccoli. Inoltre* $P(x,D)$ *è ipoellittico* C^∞.

TEOREMA 2.2. – *Sia* $\Re a_{d0}(0)\neq 0$. *Supponiamo che per ogni punto della varietà caratteristica anisotropa* $\overline{\Sigma}$ *esista un intorno conico* Γ *in cui valga una delle seguenti condizioni (la stessa, con lo stesso segno, in un intorno di ogni punto di* $\overline{\Sigma}$):

$$\Im a_{lj}(x)\, \xi_1^l \xi_2^{j+m+1} \leq 0 \qquad (\geq 0)$$

$$\Im a_{lj}(x)(\operatorname{sign} \xi_1)\, \xi_1^l \xi_2^{j+m+1} \leq 0 \qquad (\geq 0),$$

per $t^* < l\frac{m}{d}+j\leq m$. *Inoltre chiediamo che* $F(x,z)$ *sia analitica in* x *e intera in* z, $F(x,0)=0$. *Allora esiste una soluzione classica di* (6) *in* $\Omega=\{|x|<\delta\}$ *per ogni dato* $f(x)\in G_0^s(\Omega)$, $s < \frac{m}{d\max\{1/2,\, 1+t^*-m\}}$, *se* μ *e* δ *sono sufficientemente piccoli.*

Terminiamo questo paragrafo con un semplice esempio che mette a confronto i risultati riportati finora. Vogliamo analizzare il comportamento di $P = D_{x_2}^6 - D_{x_1}^5 + a(x)\, D_{x_1}^4 D_{x_2}$ per diverse scelte di $a(x)\in \mathcal{A}(\mathbf{R}^2)$. Se $a(x) = ix_2$, P è G^s-risolubile per $s<\frac{3}{2}$ per il Teorema 1.1, e non è G^s-risolubile per $s>\frac{3}{2}$ (Corli, 1989). Se $a(x)=ix_2^2$ (in generale se $\Im a(x)$ non cambia segno), applicando il Teorema 2.2 si ha risolubilità G^s per $s<2$. Se $a(x)=i$ (in generale se $\Im a(x)\neq 0$) anche l'ipotesi *(i)* del Teorema 2.1 è verificata, e dunque P è risolubile C^∞ e ipoellittico C^∞.

3. – EDP con caratteristiche involutive di alta molteplicità.

Nell'ultima parte della tesi viene dimostrato un risultato di ipoellitticità (in ambito C^∞ e Gevrey) che estende quello contenuto nel Teorema 2.1 al caso n-dimensionale, per equazioni con caratteristiche involutive di alta molteplicità. In particolare, si considera un operatore lineare del tipo $P = \sum_{|\alpha| \leqslant M} c_\alpha(x)\, D^\alpha$, con coefficienti analitici, e tale che la varietà caratteristica Σ sia una varietà regolare di codimensione $n' \geqslant 1$. Lavoreremo microlocalmente, in un intorno conico Γ di $(x_0, \xi_0) \in \Sigma$.

TEOREMA 3.1. – *Supponiamo che P abbia caratteristiche di molteplicità costante $m > 3$ su Σ; indicando con $p_M(x, \xi)$ e $J^0(x, \xi) := p'_{M-1}(x, \xi)\,|_\Sigma$ rispettivamente il simbolo principale e il simbolo subprincipale di P, chiediamo che $p_M(x, \xi)$ sia a valori reali e, se m è pari, non negativo; inoltre, sia $\Re J^0(x, \xi) < 0$ per $(x, \xi) \in \Sigma$.*

Consideriamo poi gli invarianti di ordine inferiore $J^j(x, \xi, X) := \frac{1}{j!}\lambda^j p'_{M-1}(x, \xi)$, per $(x, \xi, X) \in N(\Sigma)$, $1 \leqslant j < m-2$, dove $N(\Sigma)$ è il fibrato normale a Σ e λ è un campo vettoriale in Γ tale che $\lambda(x, \xi)$ in $(x, \xi) \in \Gamma$ è nella classe di equivalenza di $X \in N_{(x, \xi)}(\Sigma)$. Supponiamo che esista un j^*, $0 < j^* < \frac{m-1}{2}$, tale che:

(I) $\Im J^{j^*}(x, \xi, X) \neq 0$ *per* $(x, \xi, X) \in N(\Sigma)$, $X \neq 0$;

(II) $\Im J^{j^*}(x, \xi, X)\, \Im J^j(x, \xi, X) \geqslant 0$ *per ogni* $(x, \xi, X) \in N(\Sigma)$, $0 \leqslant j < j^*$.

Allora P è micro-ipoellittico e G^s-micro-ipoellittico per $s \geqslant \frac{m}{m-1-j^*}$.

Osserviamo che le ipotesi del Teorema 3.1 ricalcano quelle del Teorema 2.1: in particolare, (I) e *(II)* corrispondono a *(i)* e *(ii)* del Teorema 2.1.

La dimostrazione del Teorema 3.1 si basa su una trasformazione «canonica» mediante operatori integrali di Fourier (Liess-Rodino, 1997) dell'operatore P in un modello pseudo-differenziale di simbolo $q(x, \xi)$; le ipotesi sugli invarianti geometrici di P si traducono in ipotesi sul segno dei coefficienti di $q(x, \xi)$. Si dimostrano poi su $q(x, \xi)$ le stime che assicurano l'esistenza della parametrix e quindi l'ipoellitticità. Visto che la trasformazione fatta in partenza mantiene l'ipoellitticità, i risultati ottenuti sul modello pseudo-differenziale si possono riportare all'operatore P.

BIBLIOGRAFIA

[1] GRAMCHEV T. e RODINO L., *Gevrey solvability for semilinear partial differential equations with multiple characteristics,* Boll. Un. Mat. Ital. B (8), **2** (1999), 65-120.

[2] HÖRMANDER L., *The analysis of linear partial differential operators* I, II, III, IV, Springer-Verlag, Berlin (1983-85).

[3] MARCOLONGO P. e OLIARO A., *Local solvability for semilinear anisotropic partial differential equations,* Ann. Mat. Pura e Appl. (IV), **CLXXIX** (2001), 229-262.

[4] OLIARO A., *Some Examples of Locally solvable Anisotropic Partial Differential Operators,* Proceedings Workshop «Partial Differential Operators», Torino, 8-10 May, 2000, L. Rodino editor, 125-136.

[5] RODINO L., *Linear partial differential operators in Gevrey spaces,* World Scientific, Singapore (1993).

Dipartimento di Matematica, Università di Torino
e-mail: oliaro@dm.unito.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Genova) - Ciclo XII
Direttore di ricerca: Prof. Luigi Rodino, Università di Torino