Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Cristina Pignotti

Problemi di controllo ottimo con tempi di uscita: semiconcavità ed applicazioni

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **4-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2001), n.3 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 531–534.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2001_8_4A_3_531_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2001.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. IV-A, Dicembre 2001, 531-534

Problemi di controllo ottimo con tempi di uscita: semiconcavità ed applicazioni.

Cristina Pignotti

I problemi con tempi di uscita rappresentano un argomento classico della teoria dei controlli. Sono assegnati un sistema

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t), u(t)) \\ y(0) = x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

dove $u : [0, \infty) \to U \subset \mathbb{R}^m$ è una funzione misurabile detta *controllo* e un insieme chiuso $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ (il *bersaglio*). Indicati con il simbolo $\tau(x, u)$ il primo tempo in cui la soluzione del sistema raggiunge $\mathcal{K}$ (*tempo di uscita*) e con y_x^u la traiettoria che parte dal punto x con controllo u, si vuole minimizzare un funzionale *costo* della forma

$$J(x, u) = \int_0^{\tau(x, u)} L(y_x^u(s), u(s))\, ds + g(y_x^u(\tau(x, u))).$$

I controlli e le relative traiettorie per cui è realizzato il minimo del funzionale sono detti ottimi.

Un esempio ben noto di problema di controllo ottimo con tempo di uscita è quello dell'atterraggio morbido sulla luna.

Il caso più studiato nella letteratura matematica è il problema del tempo minimo, che corrisponde alle scelte $L \equiv 1$ e $g \equiv 0$.

Il metodo della *programmazione dinamica* per risolvere tale classe di problemi consiste nell'analizzare le proprietà della *funzione valore*

$$V(x) := \inf_u J(x, u) \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Di fatto, tale funzione può essere usata per derivare delle condizioni di ottimalità per le traiettorie del sistema e, talvolta, controlli ottimi in forma «feedback». È ben noto che la funzione valore è una soluzione di viscosità (nel senso introdotto da Crandall e Lions) di una opportuna equazione di Hamilton-Jacobi, e questo costituisce una alternativa caratterizzazione di V.

Il problema che si ha seguendo questo approccio è dovuto al fatto che le condizioni di ottimalità sono legate al gradiente della funzione valore ma questa funzione in generale non è differenziabile. Osserviamo che anche la continuità di V non può essere data per buona. Infatti, essa è legata alla controllabilità del sistema di controllo in un intorno del bersaglio e richiede che il costo di uscita g soddisfi opportune condizioni di compatibilità (vedi ad es. [1]).

I casi in cui l'approccio della programmazione dinamica risulta più efficace sono quelli in cui la funzione valore, oltre ad essere continua, possiede un qualche tipo di gradiente generalizzato. La maggiore regolarità che ci si può aspettare, con una certa generalità, dalla funzione valore è la *semiconcavità*.

Ricordiamo che una funzione si dice semiconcava se può essere rappresentata (almeno localmente) come somma di una funzione concava e di una funzione regolare. Le funzioni semiconcave mantengono quindi molte proprietà delle funzioni concave, ad esempio sono due volte differenziabili quasi ovunque e in ogni punto il superdifferenziale è non vuoto.

Nel caso dei problemi di controllo in cui la funzione valore è semiconcava è spesso possibile mettere in relazione la differenziabilità della funzione valore con l'unicità delle traiettorie ottime e dare condizioni necessarie e sufficienti affinché una traiettoria sia ottima.

Per i problemi con tempi di uscita risultati di semiconcavità, a nostra conoscenza, erano finora noti solo in casi molto particolari. Ad esempio, Lions (vedi [6]) ha provato la semiconcavità della funzione valore per problemi di calcolo delle variazioni con tempi di uscita. In tali problemi, $f(x, u) = u$ senza restrizioni sullo spazio dei controlli e il costo corrente L è convesso e coercivo rispetto alle variabili di controllo. Per problemi di controllo governati da equazioni di stato non-lineari, alcuni risultati di semiconcavità sono stati ottenuti da Cannarsa e Sinestrari nel caso particolare del tempo minimo.

1. – Problemi con costo non degenere.

Nella prima parte della tesi sono studiati problemi con tempi di uscita con costo corrente non degenere. Si assume cioè che il costo corrente L sia inferiormente limitato da una costante strettamente positiva. Tale ipotesi permette di poter stimare il tempo di uscita delle traiettorie ottime con la funzione tempo minimo.Quindi le proprietà di regolarità note per il tempo minimo possono essere utilizzate per studiare la regolarità della funzione valore.

Si provano i seguenti risultati:

TEOREMA 1. – *Sotto opportune ipotesi di regolarità e di compatibilità sui dati* (f, g, L, $\partial\mathcal{K}$ *ed* U) *la funzione valore* V *è lipschitziana.*

TEOREMA 2. – *Sotto opportune ipotesi di regolarità e di compatibilità sui dati* (f, g, L, $\partial\mathcal{K}$ *ed* U) *la funzione valore* V *è semiconcava.*

Questi risultati di regolarità sono poi utilizzati per determinare condizioni necessarie e sufficienti di ottimalità per il nostro problema e per caratterizzare i punti di differenziabilità della funzione valore. In particolare si prova il seguente

TEOREMA 3. – *La funzione valore è differenziabile in un punto se e solo se da tale punto parte una e una sola traiettoria ottima.*

Assumendo più regolarità sui dati si possono ottenere altre interessanti proprietà di regolarità di V.

Sia Σ l'insieme dei punti di non-differenziabilità di V. Da un risultato generale sulle funzioni semiconcave si ha che Σ è $\mathcal{H}^{n-1}$-rettificabile, cioè può essere ricoperto da un insieme numerabile di ipersuperfici di classe C^1. Riusciamo ad estendere il risultato di rettificabilità alla chiusura dell'insieme singolare. Questo non vale per generiche funzioni semiconcave, infatti non è difficile costruire esempi di funzioni semiconcave per cui chiusura dell'insieme singolare non è rettificabile. Per ottenere il risultato di rettificabilità introduciamo una opportuna nozione di punto *coniugato*. Denotiamo con Γ l'insieme dei punti coniugati. Un primo risultato ottenuto è il seguente:

TEOREMA 4. – *L'insieme $\Sigma \cup \Gamma$ è un chiuso e la funzione valore eredita la regolarità dei dati nel suo complementare.*

Quindi, come immediata conseguenza, si ha l'inclusione $\overline{\Sigma} \subset \Sigma \cup \Gamma$.

Utilizzando un lemma di tipo Sard e il teorema della funzione implicita riusciamo a provare la rettificabilità dei punti coniugati non singolari. A questo punto, ricordando che l'insieme singolare è rettificabile si ha il risultato cercato.

TEOREMA 5. – *L'insieme $\overline{\Sigma}$ è $\mathcal{H}^{n-1}$ rettificabile.*

I risultati di questa sezione sono contenuti in [3] e in [5].

2. – Un problema con costo degenere.

Nella seconda parte della tesi si studia un modello con costo degenere. In particolare si assume che non ci sia costo finale ($g \equiv 0$) e che $L(x, u) \equiv L(x)$ con

$$L(x) \geq 0 \quad x \in \Omega \qquad L(x) = 0 \quad x \in \partial\Omega$$

dove $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$ la cui frontiera $\partial\Omega$ costituisce il bersaglio. Il funzionale costo ha la forma

$$J(x, u) = \int_0^{\tau(x, u)} e^{-\lambda t} L(y_x^u(t))\, dt$$

dove $\tau(x, u)$ è il tempo in cui la traiettoria $y_x^u(\cdot)$, con $y_x^u(0) = x$ e $y'(t) = u(t)$, raggiunge $\partial\Omega$.

In questo caso, a causa della degenerazione del costo, non vale la stima con il tempo minimo. In particolare il tempo di uscita può anche essere infinito. Lo studio della regolarità della funzione valore per questo problema non può quindi essere affrontato con le stesse tecniche del caso non degenere.

Abbiamo utilizzato un nuovo metodo per costruire traiettorie amissibili per il problema di controllo (soddisfacenti precise relazioni) basato sulla soluzione di opportuni sistemi di inclusioni differenziali. Si dimostra il seguente risultato:

TEOREMA 6. – *La funzione valore V è semiconcava.*

La semiconcavità è quindi applicata per determinare condizioni di ottimalità e per studiare l'insieme singolare della funzione valore. Questi risultati sono contenuti anche in [4].

Osserviamo che, in generale, non ci si aspetta che la funzione valore sia semiconcava. È infatti facile, modificando il costo J, costruire un problema di controllo con orizzonte finito e costo degenere la cui funzione valore non è semiconcava.

Osserviamo inoltre che il precedente problema con tempi d'uscita è equivalente ad un problema di controllo ottimo con vincoli di stato. Infatti, se denotiamo con $\mathcal{A}_x$ l'insieme dei controlli u tali che le traiettorie che partono da x con controllo u restano in $\overline{\Omega}$ per tutti i tempi positivi, allora la funzione valore può essere definita come segue

$$V(x) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} L(y_x^u(t))\, dt\,.$$

Quindi, questo risultato può essere visto come un primo passo per studiare la semiconcavità della funzione valore associata a più generali problemi di controllo ottimo con vincoli di stato. Per tali problemi non sono noti sino ad ora altri risultati di semiconcavità.

L'ultima parte della tesi è dedicata allo studio della funzione valore per il problema con vincoli di stato nel caso unidimensionale. In dimensione $n = 1$ viene provata la semiconcavità della funzione valore senza richiedere che L sia non negativo e nullo su $\partial\Omega$. Quest'ultimo risultato è contenuto in [2].

BIBLIOGRAFIA

[1] BARDI M. e CAPUZZO DOLCETTA I., *Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations*, Birkhäuser (1997).

[2] CANNARSA P. e PIGNOTTI C., *Optimal control with state constraints: a semiconcavity result,* Proceedings of the 38th Conference on Decision and Control, IEEE, New York (1999), 436-441.

[3] CANNARSA P., PIGNOTTI C. e SINESTRARI C., *Semiconcavity for optimal control problems with exit time,* Discrete and Continuous Dynamical Systems, **6** (2000), 975-997.

[4] CANNARSA P. e PIGNOTTI C., *Semiconcavity of the value function for an exit time problem with degenerate cost,* preprint, (2000).

[5] PIGNOTTI C., *Rectifiability results for singular and conjugate points of optimal exit time problems,* preprint (2000).

[6] LIONS P. L. Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations, Pitman, Boston (1982).

Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Roma «Tor Vergata»
e-mail: pignotti@axp.mat.uniroma2.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Roma II) - Ciclo XII
Direttore di ricerca: Prof. Piermarco Cannarsa, Università di Roma «Tor Vergata»