Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Stefania Ragni

Modelli multiscala del sistema circolatorio

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **4-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2001), n.3 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 535–538.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2001_8_4A_3_535_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2001.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. IV-A, Dicembre 2001, 535-538

Modelli multiscala del sistema circolatorio.

STEFANIA RAGNI

1. – Introduzione.

Lo studio dei fenomeni emodinamici è volto alla comprensione delle caratteristiche del sistema circolatorio, in condizioni sia fisiologiche che patologiche. In questo contesto, l'approccio numerico può rappresentare un utile supporto ai modelli sperimentali.

Una delle principali caratteristiche del sistema circolatorio è dovuta alla presenza di fenomeni «multiscala»: comportamenti locali del flusso sanguigno possono influenzare globalmente la circolazione. Ad esempio una stenosi, dovuta ad una placca aterosclerotica, può alterare il moto del sangue nel distretto vascolare in cui si è formata, producendo effetti rilevanti sull'intero sistema.

In questo contesto, una corretta descrizione del sistema circolatorio necessiterebbe di una rappresentazione globale. Sfortunatamente, una descrizione fluido-meccanica completa dell'intera circolazione risulta un problema di notevole complessità computazionale. Per questo motivo, è interessante rivolgere attenzione alla proposta, all'analisi e all'implementazione numerica di un *approccio eterogeneo* o *multiscala* che permetta la coesistenza di prospettive sia locali che globali e accoppi differenti modelli per motivi computazionali.

In letteratura è sviluppata una grande varietà di modelli per lo studio dei fenomeni emodinamici. Una prima classe è basata sull'uso delle equazioni di Navier-Stokes per una descrizione matematica locale della circolazione sanguigna. Un'altra clsse di modelli più semplici è basata su una rappresentazione globale dell'intero sistema circolatorio mediante *parametri concentrati*, dedotti da un'analogia esistente tra reti idrauliche ed elettriche ([1]).

Nell'ambito dell'approccio multiscala, proponiamo un accoppiamento tra equazioni differenziali ordinarie (che forniscono descrizioni di carattere «sistemico» o globale della circolazione) e sistemi alle derivate parziali (che descrivono caratteristiche locali del flusso sanguigno).

2. – Modelli locali e sistemici.

Come precedentemente accennato, diversi modelli emodinamici sono proposti in letteratura. Denotato con Ω un dominio tridimensionale che rappresenta la porzione di un assegnato distretto su cui focalizzare l'attenzione, indichiamo con $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ e $p(\mathbf{x}, t)$ la velocità e la pressione del sangue in un punto arbitrario $\mathbf{x} \in \Omega$ ad ogni istante di tempo $t > 0$. Una rappresentazione locale delle variabili rilevanti per la circolazione sanguigna in Ω può essere fornita dalle equazioni di Navier-Stokes

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\, \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases} \qquad \mathbf{x} \in \Omega,\ t > 0,$$

dove ν rappresenta la *viscosità cinematica.* Particolare interesse è stato rivolto alla prescrizione di opportune condizioni su ogni parte del bordo del distretto vascolare stesso. Precisamente, è possibile individuare diverse parti sul contorno del domino Ω considerato: la parete vascolare esterna, le sezioni *distali* e *prossimali.* Notiamo che il bordo fisico del distretto è rappresentato soltanto dalla parete vascolare, mentre le sezioni distali e prossimali costituiscono dei bordi «artificiali» introdotti per delimitare il dominio stesso, con lo scopo di rappresentare il comportamento locale del particolare distretto (ad esempio, si veda [6]).

Inoltre, è stato proposto un modello specifico, generalizzazione del problema formulato in [2], in cui viene assegnata una combinazione lineare tra la componente normale del tensore degli sforzi e la componente normale della velocità su ogni sezione artificiale Γ_i ([4]):

$$(2) \qquad p\mathbf{n} - \nu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - R_i (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\, \mathbf{n} = p_i \mathbf{n} \quad i = 1, \ldots, n,$$

dove ogni p_i è un'assegnata funzione di t, le R_i sono opportune costanti e $\mathbf{n}$ rappresenta il versore normale ad ogni Γ_i. È stata, infine, effettuata un'analisi teorica del modello formulato.

Una descrizione globale o sistemica della circolazione sanguigna, invece, è fornita dai modelli a parametri concentrati. Precisamente, l'intero sistema vascolare viene opportunamente suddiviso in semplici distretti ([5], [7]), il cui numero dipende dall'accuratezza richiesta. In ognuno di tali distretti, il comportamento del fluido sanguigno è descritto da equazioni differenziali ordinarie, che possono essere ottenute dal modello di Navier-Stokes mediante alcune semplificazioni. Questo approccio è basato su un'analogia esistente tra reti idrauliche e elettriche; in particolare, il flusso e la pressione sono identificati con la corrente e il potenziale elettrici, mentre la deformabilità delle pareti e le proprietà di viscosità e inerzia vengono descritte da condensatori, resistenze e induttori. Le rappresentazioni sistemiche della circolazione sono, quindi, fornite da circuiti elettrici con una specifica rappresentazione per l'azione del cuore. Queste descrizioni a parametri concentrati vengono date da equazioni non lineari, di cui sono state analizzate le proprietà di stabilità.

3. – Accoppiamento tra modelli a parametri concentrati e distribuiti.

Come visto nelle precedenti sezioni, la complessa natura multiscala del sistema circolatorio suggerisce di sviluppare un meccanismo numerico in grado di accoppiare modelli differenti. In particolare, rappresentiamo uno specifico distretto Ω dove il comportamento del fluido sanguigno è descritto dalle equazioni di Navier-Stokes accoppiate con un modello a parametri concentrati della rimanente parte del sistema circolatorio. In questo contesto, si affronta il problema di caratterizzare opportune condizioni di interfaccia tra i singoli sottomodelli. Si propone una metodologia matematica che governa l'interazione tra il solutore delle equazioni di Navier-Stokes nel distretto vascolare in esame e il modello sistemico del restante apparato circolatorio. Tale interazione viene descritta quantitativamente attraverso opportune condizioni al contorno per il modello locale (pressioni medie sulle sezioni di interfaccia) e opportuni termini forzanti ai morsetti esterni del modello a rete elettrica (flussi alle sezioni di ingresso e uscita).

Suppostoo che il vaso Ω abbia una morfologia complessa, denotiamo con p_i e F_i la pressione media e il flusso su ogni sezione artificiale Γ_i. Assumiamo che il sottomodello a parametri concentrati sia descritto da un'equazione del tipo

$$
\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{y}}{dt} = A(\mathbf{y}, t)\, \mathbf{y} + \mathbf{r}(\mathbf{y}, t) + \mathbf{b}(F_i(t)) \quad t > 0 \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 \end{cases} \tag{3}
$$

dove $\mathbf{y}$ rappresenta il vettore di stato, mentre i termini $\mathbf{r}$ e $\mathbf{b}$ tengono conto dell'azione del cuore e dei termini forzanti, rispettivamente. I modelli (1) e (3) vengono accoppiati imponendo le condizioni di interfaccia (2) in cui i valori p_i sono forniti dalla soluzione del sistema differenziale ordinario e

$$
F_i(t) = \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}\, d\gamma \quad i = 1, \ldots, n.
$$

Condizioni di interfaccia alternative, inoltre, sono state fornite in [3].

È stato ottenuto un risultato di esistenza locale-in-tempo per il problema multiscala descritto finora ([4]). In particolare, è stata provata la buona posizione dei singoli sottoproblemi, locale e sistemico, ed è stata mostrata l'esistenza della soluzione del problema accoppiato mediante classici risultati della teoria di punto fisso.

Inoltre, è stato proposto uno schema numerico di risoluzione ([3]), che utilizza una discretizzazione ad elementi finiti per il trattamento delle equazioni di Navier-Stokes e uno schema di avanzamento in tempo alle differenze finite per l'approssimazione del modello a parametri concentrati. Infine, sono stati analizzati numericamente diversi casi test di significativo interesse applicativo.

BIBLIOGRAFIA

[1] Formaggia L., Nobile F., Quarteroni A. e Veneziani A., *Multiscale modelling of the circulatory system: a preliminary analysis*, Computer and Visualization in Science, **2**, No. 2-3 (1999), 75-83.

[2] Heywood J., Rannacher R. e Turek S., *Artificial boundaries and flux and pressure conditions for the Incompressible Navier-Stokes Equations*, Int. J. Num. Meth. Fl., **22** (1996), 325-352.

[3] Quarteroni A., Ragni S. and Veneziani A., *Coupling between lumped and distributed models for blood flow problems*, Technical Report Area Matematica - Calcolo Numerico, AM-CN n. 02-07-2000, Dipartimento Scientifico Tecnologico, Università degli Studi di Verona, accettato per la pubblicazione su *Computer and Visualization in Science* (2000).

[4] Quarteroni A., Ragni S. e Veneziani A., *An existence result for multiscale models of blood flow problems*, Quaderno del Dipartimento di Matematica «F. Brioschi», Politecnico di Milano, n. 423/P (2000).

[5] Rideout V. C. and Dick D. E., *Difference-Differential Equations for Fluid Flow in Distensible Tubes*, IEEE Transactions on bio-medical engineering, **BME-14**, No. 3, July (1967), 171-177.

[6] Veneziani A., *Mathematical and numerical modelling of blood flow problems*, Tesi di Dottorato, Università di Milano (1998).

[7] Westerhof N., Bosman F., De Vries C. J. and Noordergraaf A., *Analog studies of the human systemic arterial tree*, J. Biomechanics, **2** (1969), 121-143.

Dipartimento di Matematica, Politecnico di Milano
e-mail: stefania@mate.polimi.it
Dottorato in Matematica Computazionale e Ricerca Operativa
(sede amministrativa: Milano) - Ciclo XIII
Direttore di ricerca: Prof. A. Quarteroni, Politecnico di Milano / EPFL Losanna
Correlatore: Ing. A. Veneziani, Politecnico di Milano